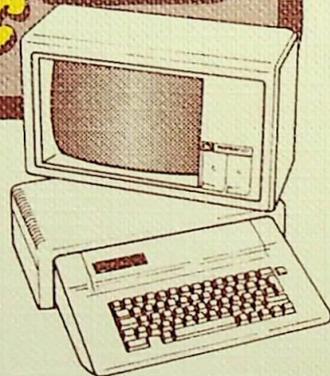


G. Daubach D. Herrmann

**MATHEMATIK**  
**AUF DEM**  
**APPLE**  
**IIc, IIe, 2c**

Fertige Programme,  
Anregungen und  
Erläuterungen in BASIC



Programme auf Diskette erhältlich

**iWT**

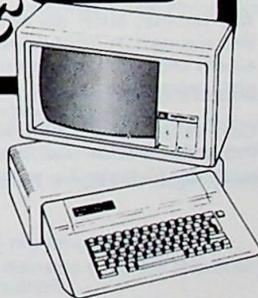


G.Daubach D.Herrmann

# MATHEMATIK AUF DEM APPLE

— 1C, IIe, 2c —

Fertige Programme,  
Anregungen und  
Erläuterungen in BASIC



ISBN 3-88 322-036-1

1. Auflage 1984

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Der Verlag übernimmt keine Gewähr für die Funktion einzelner Programme oder von Teilen derselben. Insbesondere übernimmt er keinerlei Haftung für eventuelle, aus dem Gebrauch resultierende, Folgeschäden.

Apple ist ein Warenzeichen der Apple Inc.

Printed in Western Germany

© Copyright 1984 by IWT-Verlag GmbH  
Vaterstetten bei München

Holdenrieds Druck- und Verlags-GmbH, Füssen  
Umschlaggestaltung: Kaselow und Partner, München

Dieser Band enthält 40 mathematische Programme aus den Bereichen

- Mehr-Register-Arithmetik
- Zahlentheorie
- Kombinatorik
- Algebra
- Geometrie
- Numerische Mathematik

Besonders nützlich werden Praktiker und Computerfans die hier neu vorgelegte Langzahl-Arithmetik finden, die die Grundrechenarten für Zahlen bis 255 Stellen gestattet!

Zahlreiche Anwendungen finden auch die hier angegebenen kombinatorischen Prozeduren: Wer wollte nicht schon mal alle Permutationen oder Kombinationen eines Problems durchspielen? Vielfältige Unterstützung findet auch das Rechnen mit Polynomen, Matrizen und komplexen Zahlen: Neben dem komplexen Horner Schema werden insbesondere Algorithmen zur Polynomdivision und Matrizeninversion gegeben.

Anwendungsbezogen sind die Programme der Numerischen Mathematik. Hier werden Verfahren zur Lösung von linearen und nichtlinearen Gleichungen gegeben, zum Eigenwertproblem von Matrizen und zur numerischen Integration und Differentiation. Alle Programme werden durch vollständige Beispiele und komplette Programmausdrucke erläutert.

Dem Verlag danken wir für die Herausgabe des Bandes und für die stets freundliche Zusammenarbeit.

Anzing, Burscheid, im Juni 1984



# INHALTSVERZEICHNIS

Seite

VORWORT .....	5
---------------	---

## EINLEITUNG

– Mathematik und Computer .....	9
– Mathematik – die ungeliebte Wissenschaft .....	9

## MEHR-REGISTER-ARITHMETIK

1. Addition langer Zahlen .....	19
2. Subtraktion langer Zahlen .....	23
3. Multiplikation langer Zahlen .....	27
4. Division langer Zahlen .....	33
5. Potenzieren .....	39
6. Fakultäts-Berechnung .....	43

## ZAHLENTHEORIE

7. $\pi$ auf 1000 Stellen .....	47
8. $e$ auf 1000 Stellen .....	53
9. Lineare Diophantische Gleichung .....	59
10. Kettenbruch/Bruchapproximation .....	65

## KOMBINATORIK

11. Permutationen .....	71
12. Zufallspermutationen .....	75
13. Kombinationen .....	79
14. Variationen .....	85
15. 01-N-Tupel .....	89
16. Partitionen .....	93

## ALGEBRA

17. Kubische Gleichung .....	99
18. Gleichung vierten Grades .....	105
19. Polynomrechnung .....	111
20. Komplexes Horner Schema .....	115
21. Polynom-Multiplikation .....	119
22. Polynom-Division .....	123
23. Matrizen-Multiplikation .....	127
24. Zweierpotenzen von Matrizen .....	131
25. Mittelwerte .....	135
26. Statistische Mittelwerte .....	139

**GEOMETRIE**

27. Pythagoreische Zahlen . . . . .	143
28. Koordinaten besonderer Dreieckspunkte . . . . .	147
29. Polygon-Berechnung . . . . .	153
30. Determinante . . . . .	157

**NUMERISCHE MATHEMATIK**

31. Müller-Iteration . . . . .	161
32. Müller-Iteration (zweidimensional) . . . . .	165
33. Newton-Iteration im Komplexen . . . . .	169
34. Neville-Interpolation . . . . .	175
35. Gauss-Jordan-Verfahren . . . . .	179
36. Matrizen-Inversion nach Faddejew . . . . .	185
37. Charakteristisches Polynom nach Faddejew . . . . .	189
38. Numerische Differentiation . . . . .	195
39. Numerische Integration (Trapezregel) . . . . .	199
40. Hamming-Verfahren für Differentialgleichungen . . . . .	201

**ANHANG**

Historische Rechenaufgaben . . . . .	207
Zitate . . . . .	213
Literaturverzeichnis . . . . .	217
Bildquellennachweis . . . . .	219

La machine arithmetique fait des effects  
qui approchent plus de la pensee  
que tout ce que font des animaux

*Pascal*

Daß die niedrigste aller Geistestätigkeiten  
die arithmetische ist, wird dadurch belegt,  
daß sie die einzige ist, welche auch durch  
eine Maschine ausgeführt werden kann

*Schopenhauer*

## EINLEITUNG

### Mathematik und Computer

Schon zu allen Zeiten hat es bemerkenswerte numerische Leistungen gegeben.

Die berühmte Stieraufgabe, mit der Archimedes die Mathematiker von Alexandria zur Verzweiflung trieb, hatte keine kleinere Lösung als

$$10366482, 7460514, 7358060 \text{ und } 4149387.$$

Ähnlich schwierig war die Lösung  $x = 1.3688081075$  der Gleichung

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

die Leonardo von Pisa, Fibonacci genannt, um 1220 auf 10 Dezimalen genau berechnete.

Van Ceulen (1539–1610) benötigte mehr als die Hälfte seines Lebens, um die Zahl pi auf 35 Dezimalen zu berechnen. Als Dank dafür hat man sie in seinen Grabstein in Leiden gemeißelt. Fermat (1601–1655) stellt in Briefen an seine armen Zeitgenossen mehrfach die Frage nach den Lösungen von

$$x^2 - 149y^2 = 1$$

deren kleinste Werte  $x = 25801741449$  und  $y = 2113761020$  sind.

In mühevoller Arbeit berechnete W. Shanks 1873 die ersten 707 Dezimalstellen von pi. Ein Großteil dieser Mühe war jedoch vergeblich, da, wie sich später herausstellte, die 528ste Stelle bereits falsch war.

An dieser Stelle muß auch der immense Rechenaufwand bedacht werden, den Ptolemaeus für die Erstellung seiner Sehnentafel Buergi und Brigg mit ihren Logarithmentafeln und Kepler mit den Rudolffinischen Tafeln hatte.

Alle diese Probleme hätten in kurzer Zeit mit Hilfe eines Rechners gelöst werden können. Es erhebt sich die Frage, ob der Computer auch prinzipiell neue Fragestellungen in Angriff nehmen kann.

1976 kam es zu dem seltenen Ereignis, daß ein mathematischer Lehrsatz Schlagzeilen in der berühmten New York Times machte. Das sensationelle Ereignis war, daß der Beweis des Vierfarbensatzes mit Hilfe von Computern gelungen war.

K. Appel und W. Haken ernteten jedoch mit ihrem Beweis bei den meisten Mathematikern nur Kopfschütteln. Ein mathematischer Beweis war traditionell etwas, was man mit Papier und Bleistift nachvollziehen konnte.

Wer aber sollte das 460-seitige Computerprogramm von Appel und Haken nachprüfen? Dazu kamen weitere 133 Seiten des Illionis Journal of Mathematics, auf denen die Autoren ihr Computerprogramm erläuterten.

Das Vier-Farben-Problem, 1852 von Francis Guthrie aufgeworfen, besagt, daß jede ebene Landkarte mit 4 Farben so gefärbt werden kann, daß je 2 benachbarte Länder verschiedenfarbig sind. Trotz erheblicher Anstrengungen widerstand die Vermutung über 120 Jahre lang den Beweisbemühungen der Mathematiker.

Die Schwierigkeit war die, alle möglichen Lagemöglichkeiten der Länder in den Griff zu bekommen. Auf Grund der Vorarbeiten von Heesch (Hannover) gelang es Appel und Haken, alle möglichen Konfigurationen in einigen tausend Fallunterscheidungen zu erfassen und vom Computer überprüfen zu lassen.

Großen Aufschwung erfuhren die Teile der Mathematik, die sich mit endlichen Mengen befassen, wie die Kombinatorik, Endliche Geometrie, Graphen- und Codierungstheorie, durch die Anwendung von Computern. Auch die Zahlentheorie erfuhr wesentliche Anregungen, so wurden z.B. sehr effektive Primzahltestverfahren entwickelt. Mit ihrer Hilfe konnte im September 1983 die z.Z. größte bekannte Primzahl

$$2^{132\,049} - 1$$

mit 39751 Stellen gefunden werden. Die Rechenzeit beträgt bei den hier benützten Lucas-Lehmer-Tests nur wenige Stunden.

Konträr ist auch die Meinung der Mathematiker zu den stochastischen Primzahltests, die Primzahlen nur einer gewissen Wahrscheinlichkeit nachweisen. Beim Rabintest läßt sich die Irrtumswahrscheinlichkeit bei einigem Aufwand auf

$$10^{-60}$$

senken. Kann man dies als Beweis der Primzahleigenschaft ansehen? Oder ist nicht schon die Irrtumswahrscheinlichkeit eines Menschen größer?

Bezeichnend ist die Geschichte von Rosser, Schönfeld und Yohe (Wisconsin), die bei ihrer Arbeit über die noch unbewiesene Riemannsche Hypothese einen Rechner benützten. Als "reine" Mathematiker mißtrauten sie dem Computer und überprüften in mühseliger Kleinarbeit dessen Betriebssystem. Tatsächlich fanden sie mehrere Fehler in der internen Rechnerlogik. Diese Fehler hatte bisher noch niemand bemerkt, obwohl der Computer bereits seit mehreren Jahren in Betrieb war.

Im Gegensatz zu den Primzahltests fehlt es bei der Primzahlfaktorisierung noch an effektiven Algorithmen. So weiß man seit langer Zeit, daß eine Zahl wie

$$2^{256} + 1$$

zerlegbar ist, man kennt jedoch bis heute noch nicht ihre Primzahlzerlegung.

Die Primfaktorisation hat große Bedeutung in der Kryptologie gewonnen. Man kann nämlich damit Verschlüsselungsverfahren konstruieren und ihr Prinzip offenlegen, ohne befürchten zu müssen, daß es 'geknackt' wird (Verfahren von Rivest, Shamir und Adleman). Die Rechenzeit zur Faktorisierung einer 1000stelligen Zahl beträgt z.Z. noch 4 Mrd. Jahre. Dies hat große politische Bedeutung, falls es einmal zu einem generellen Atomwaffen-Sperrvertrag kommen sollte und die Codierung der Beobachtungs sonden bekannt gegeben werden müßte.

Ein weiteres bekanntes bisher ungelöstes Problem der Zahlentheorie ist der sog. große Fermat-Satz. Er besagt, daß es keine ganzzahlige Lösung der Gleichung  $\neq 0$

$$x^n + y^n = z^n$$

für  $n > 2$  gibt. Gleichungen, von denen nur ganzzahlige Lösungen gesucht werden, nennt man Diophantisch. Vor kurzem (1983) konnten Faltings (Wuppertal) zeigen, daß Diophantische Gleichungen vom Grad  $> 3$  höchstens endlich viele Lösungen haben können (Mordellsche Vermutung). Durch die Reduzierung auf endlich viele Fälle scheint das Problem nun mit dem Computer greifbar.

Im Falle der sog. Catalanschen Vermutung ist dies tatsächlich der Fall. Diese besagt, daß es keine zwei Potenzen  $> 2$  von natürlichen Zahlen – außer 8 und 9 – gibt, deren Differenz 1 ist. Tijdemann konnte ebenfalls zeigen, daß das Problem höchstens endlich viele Lösungen hat. Durch umfangreiche Computerberechnungen glaubt er die Catalansche Vermutung mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit bewiesen zu haben. Was ist von einem solchen Beweis zu halten?

Auch viele Fragestellungen der Kombinatorik, die infolge des großen Rechenaufwandes bisher ungelöst waren, konnten seitdem beantwortet werden. Bekannt ist das Eulerische Offiziersproblem (1782): Ist es möglich, 6 verschiedene Offiziere aus 6 verschiedenen Regimentern so in einem Quadrat aufzustellen, daß in jeder Reihe und Spalte jeder Offiziersrang und jedes Regiment vertreten ist?

Eine solche Anordnung nennt man ein Paar von orthogonalen Lateinischen Quadraten. Euler vermutete, daß es keine orthogonalen Quadrate der Ordnung 6, 10, 14, usw. gäbe. Erst in den Jahren 1959/60 konnten Bose und Shrikhande nach umfangreichen Rechnungen orthogonale Lateinische Quadrate der Ordnung 10 und 14 angeben. Sie erhielten dafür den Spitznamen "the Euler Spoilers".

Verwandt mit den orthogonalen Lateinischen Quadraten sind die Blockpläne der Endlichen Geometrie. Ausgangspunkt war das Schulmädchenproblem des

Geistlichen Kirkman (1851): Kann man 15 Schulmädchen an den 7 Wochentagen so in Dreierreihen spazieren führen, daß jedes Mädchenpaar an genau einem Tag zusammentrifft?

Spezielle Blockpläne sind die sog. Steinersysteme  $S(t,k,v)$ . Dabei müssen  $v$  Dinge zu je  $t$  Stück in  $k$  Reihen angeordnet werden können. Die Lösung des Schulmädchen-Problems stellt somit ein  $(2, 3, 15)$ -Steinersystem dar. Es ist im Rahmen des Buches nicht möglich, die Vielzahl der ungelösten Probleme im Zusammenhang mit den Steinersystemen aufzuzählen. Erwähnt sei, daß die kleinsten Steinersysteme, deren Existenz bisher unbewiesen sind, folgende sind:

$S(4, 5, 17)$ ,  $S(4, 5, 21)$ ,  $S(4, 5, 27)$

Durch umfangreiche Rechnung konnten Mendelsohn und Hung vor wenigen Jahren z.B. zeigen, daß das Steinersystem  $S(4, 5, 15)$  nicht existiert. Hier bleibt noch viel Forschungstätigkeit für künftige Mathematiker und viel Rechenarbeit für die nächste, noch schnellere Computergeneration zu tun.



“Aus Margarita Philosophica des Gregor Reisch, Freiburg 1503. Boethius mit indischen Zahlen und Pythagoras als Linienrechner vor der Arithmetica sitzend“

Es macht mich traurig, daß gebildete Leute  
nicht einmal von der Existenz  
meines Fachgebietes wissen

*P. R. Halmos*

Die Furcht vor der Mathematik . .  
steht der Angst erheblich näher  
als die Ehrfurcht

*F. Auerbach*

### **Mathematik – die ungeliebte Wissenschaft**

Kein Zweifel, die Mathematik war schon immer eine unpopuläre Wissenschaft. Besonders dem Christentum waren die heidnischen Schriften eines Euklid-Diophant und Archimedes als heidnisch suspekt. Tertullian schreibt:

“Nach Christus brauchen wir keinerlei Wissbegier mehr, nach den Evangelien sind keinerlei Forschungen mehr nötig“.

Als Folge der Verketzerung der Heiden, wurde die berühmte Mathematikerin Hypathia, Tochter des Akademievorstehers Theon, 415 von einer fanatischen Menge zu Tode gemartert. Dies, obwohl der Kirchenlehrer Synesios von Kyrene, Bischof von Ptolemais, ein Hörer ihrer Vorlesung war. Sogar die Mathematik hatte den Beigeschmack des Heidnischen. So lautete eines der Gesetze des Justinian-Kodex: “de Maleficus, mathematicis et ceteris similis” (Über Übeltätern, Mathematikern und dgl.):

“Vollständig verboten ist die verdammenswerte Kunst der Mathematik“

Die Mathematiker werden dort mit Giftmischern, Zauberern und Sterndeutern (Veneficis, Magis, Chaldeis) in einen Topf geworfen. Noch 1614 bezeichnete der Pater Caccini in einer Predigt, die gegen Galilei gerichtet war, die Mathematik als Teufelskunst und die Mathematiker als Urheber aller Ketzereien, die man aus allen Staaten vertreiben müsse.

Er stützte sich dabei auf den heiligen Augustinus, der in De genesi ad literam geschrieben hatte:

“Es besteht die Gefahr, daß die Mathematiker mit dem Teufel im Bunde, den Geist trüben und in die Bande der Hölle verstricken“.

Als 529 Kaiser Justinian die Athener Philosophenschule schloß, erlosch eine lange Tradition mathematischer Lehre. Noch bis 485 hatte an dieser Schule Proklos gelehrt, dem wir einen grundlegenden Euklid-Kommentar verdanken.

Es ist ein ganz wesentlicher Verdienst der arabischen Kultur ab 800 die wichtigsten Werke des Apollonius, Archimedes, Heron, Euklid, Diophant, Ptolemaeus usw. in ihre Sprache übersetzt und somit der Nachwelt erhalten zu haben. Einige Übersetzungen aus dem Griechischen ins Lateinische führte auch Boethius (480 - 524) durch. Von ihm stammt auch die im Mittelalter übliche Einteilung der Künste in das Trivium (Grammatik, Rhetorik, Logik) und das Quadrivium (Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik).

Um eine mathematische Allgemeinbildung in Gang zu bringen, führte der Schotte Alkuin von York, im Auftrag Karls des Großen, 789 eine Schulreform durch. Sie forderte, daß neben Psalmen, Noten und Grammatik insbesondere auch der Computus gelehrt werden solle. Unter dem Computus Ecclesiasticus verstand man die Berechnung der beweglichen Kirchenfeiertage. Es war nämlich der Kirche ein Dorn im Auge, daß wegen der mangelhaften Rechenfertigkeit der Geistlichen das Osterfest zu verschiedenen Zeitpunkten gefeiert wurde. Alkuin selbst schrieb ein Rechenbuch zu Unterrichtszwecken.

Der Rechenunterricht scheint – wie heute – nicht die besondere Freude der Schüler gewesen zu sein. Ein Mönch namens Strabo der Klosterschule Reichenau schreibt 822 in sein Tagebuch:

“Zur Abwechslung und Unterhaltung lösten wir mathematische Rätsel, welche Alkuin für den großen Karl gefertigt hatte. Viele vermochten nicht allen diesen Rechnungen zu folgen, und bevor wir zur Geometrie übergingen, traten diejenigen aus, welche sich fortan den Studien der Medizin, Rechtswissenschaft und den Künsten der Malerei und der Bildhauerei widmen wollten“.

Ein Mathematiker, Gerbert von Aurillac (940 - 1003) bestieg als Sylvester II 999 den Stuhl Petri. Gerbert hatte einige Jugendjahre in Spanien verbracht und dort von den Arabern den Abakus (Rechenbrett) kennengelernt. Als Lehrer der Domschule Reims verfaßte er ein Lehrbuch zum Rechnen am Abakus. Auch an den aus den Domschulen hervorgegangenen Universitäten Bologna (1088), Paris (1150), Salerno (1173) und Montpellier (1180) spielte die Mathematik keinerlei Rolle.

Von der Universität Erfurt weiß man aus Quellen, daß die dort wirkenden Humanisten die Anstellung eines Mathematikers strikt ablehnten. Noch Anfang des 16. Jahrhunderts legten an der Universität Paris die Kandidaten für den Grad des Magisters der Künste kein Examen im Fach Geometrie ab. Sie mußten lediglich beenden (!), Vorlesungen über die ersten 6 Bücher des Euklid gehört zu haben.

Das Risiko einer wirklichen Prüfung wollte man nicht eingehen. Bezeichnend ist, daß der Lehrsatz des Pythagoras am Ende des 1. Kapitels den Namen “Magister Matheseus” trug und somit als Weisheit letzter Schluß galt.

Welche Schwierigkeiten das Rechnen damals machte, wird aus der Rede Philipp Melanchtons vor der Universität Wittenberg (1517) deutlich.

“. . . Deshalb können ihre Anfangsgründe (der Rechenkünste) gar nicht dunkel und schwer sein; sie sind im Gegenteil so durchsichtig, daß Kinder sie begreifen können, weil ja alles so natürlich vor sich geht. Die Regeln des Vielfachen und Teilens allerdings erfordern viel mehr Fleiß, aber ihr Sinn wird schon bald von den aufmerksameren eingesehen werden. Übung und Anwendung erfordert diese Fertigkeit wie alle anderen.“



“Ein Vater meldet seinen Sohn bei einem Rechenmeister an.  
Holzschnitt von Hans Weiditz, 1535“

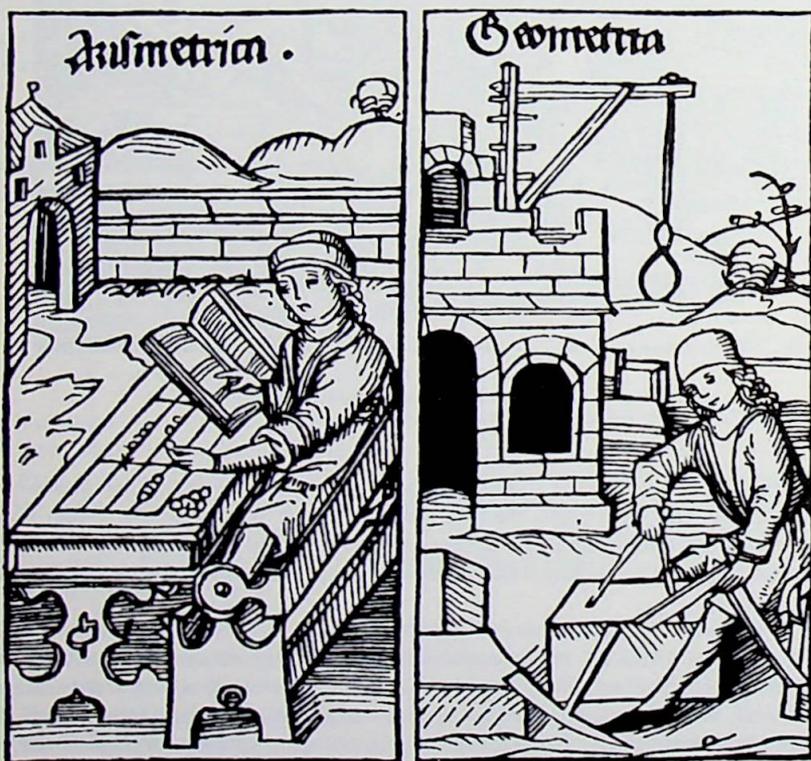
Die Mathematik-Kenntnisse dieser Studenten aus den Lateinschulen sind entsprechend schlecht gewesen. Der Rechenunterricht wurde in der Regel von einem externen Rechenmeister übernommen, die dazu meist eigene Rechenbücher verfaßten. Der bekannteste Rechenmeister war Adam Ries(e) in Erfurt und Annaberg.

Es dauerte noch sehr lange, bis Mathematik ein reguläres Unterrichtsfach war. So wurde noch 1805 (!) im Jahresbericht eines lutherischen Gymnasiums in Essen vermerkt, daß an der Schule kein Rechenunterricht erteilt werde. Dies sei der Fall, weil ältere Schüler den Lehrern bekannt gemacht hätten, “daß in der Stadt jetzt ein fertiger Rechenmeister sei, der eine kürzere Methode habe”.

Oft wurde der Mathematik-Unterricht von nicht ausgebildeten Lehrkräften, z.B. von Theologen übernommen, die in Wartestellung auf eigene Pfarrpfründe waren. Ob es wohl diese Theologen waren, über die es in der Prüfungsordnung von 1820 für Preussen heißt: “Um das Eindringen untüchtiger Objekte in den Höheren Schulen Einhalt zu gebieten . . .”. Auch in Bayern waren viele Mathematik-Lehrstühle im 19. Jahrhundert noch mit Theologen besetzt.

Daneben litt die mathematische Lehre noch unter anderen Schwierigkeiten. Mollweide in Leipzig erklärte es für unmöglich, neben der, für alle Fakultäten verbindlichen Mathesis pura, auch höhere Mathematik zu bringen, weil es dabei zuviel Schreibens an der Tafel gäbe.

Bezeichnend ist auch der Bericht von Neumann in Berlin von 1818: "Als ich mich beim Professor für Mathematik meldete, sagte dieser, ja ich habe die Vorlesung angezeigt, aber sie pfligt niemals zustande zu kommen. Ich verab-



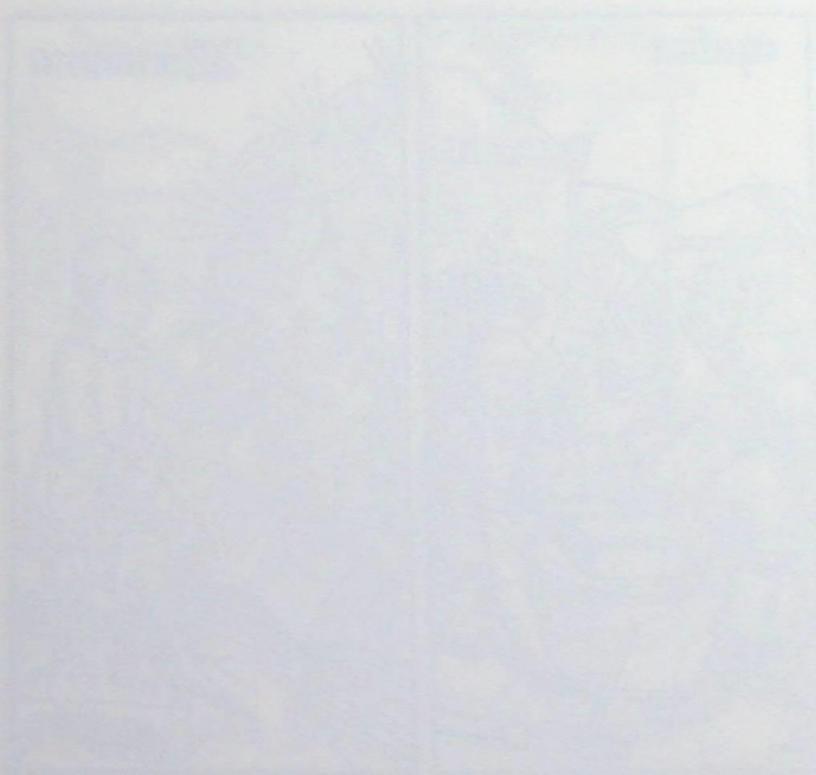
"Darstellung der Arithmetica und Geometria aus dem Quadrivium, Holzsnitte um 1500"

redete mich mit 5 anderen, zu ihm zu gehen. Der Professor kam ins Auditorium und schrieb ununterbrochen Formeln an die Tafel und sprach dabei kein Wort, bis die Zeit um war. Am 2. Tag kamen nur noch 2 Zuhörer. Der Professor stellt sich wieder an die Tafel und zeichnete wieder ununterbrochen mathematische Formeln an diese. Am dritten Tag kam außer mir nur noch ein Zuhörer. Der Professor erschien, ging ans Katheder, wandte sich an uns und sagte: Sie sehen, meine Herren, es kommt kein Kolleg zustande“.



“Darstellung der Musica und Astronomia, Holzschnitte um 1500“

The first stage of the process is the identification of the problem. This is done by the project manager and the team. The next stage is the analysis of the problem. This is done by the project manager and the team. The third stage is the development of a solution. This is done by the project manager and the team. The fourth stage is the implementation of the solution. This is done by the project manager and the team. The fifth stage is the evaluation of the solution. This is done by the project manager and the team.



A very faint caption or title is located below the diagram, but the text is completely illegible due to the low contrast of the scan.

## 1. Addition langer Zahlen

Jeder, der schon länger mit dem Computer rechnet, ist schon einmal an die Grenze der Rechengenauigkeit gestoßen. Während bei Großrechenanlagen meist eine Langzahl-Arithmetik hardware-mäßig implementiert ist, ist dies bei Mikrocomputern nicht der Fall.

Daher sollen im folgenden, Programme zu den Grundrechenarten für lange Zahlen angegeben werden.

Diese Programme setzen voraus, daß die eingegebenen Zahlen kommafrei und positiv sind. Dies ist keine große Einschränkung, da die Vorzeichenregeln leicht von Hand ausgeführt werden können. Kommafrie Zahlen können durch entsprechendes Ausklammern von Zehnerpotenzen erhalten werden, z.B.

$$12.3456789 = 123456789 * 10^{-7}$$

$$0.000987654 = 987654 * 10^{-9}$$

Alle Zahlen werden als Stringvariablen eingegeben und können daher bis zu 255 Stellen haben, sie werden innerhalb des Programms in Felder zerlegt. Dabei kann jedes Feld 1 bis 8 Ziffern umfassen.

Umfaßt ein Feld mehrere Ziffern, so ist zu beachten, daß der Rechner führende Nullen nicht ausdrückt. Mit Hilfe der Stringfunktion kann man auch führende Nullen ausdrucken lassen, wie es z.B. im Programm 7 geschieht.

Wird der 1. Summand durch das Feld U(I), der zweite durch V(I) dargestellt, so kann bei ziffernweiser Addition das Addieren wie folgt beschrieben werden:

```
90  K = 0
100 FOR I=N TO 1 STEP -1
110  W = U(I) + V(I) + K
120  W(I) = W - INT(W/10) * 10
130  K = INT(W/10)
140  NEXT I
150  W(0) = K
```

Dabei ist N die Länge des größten Summanden, K der Übertrag. Die Summe ist im Feld W(I) gespeichert. Bei sehr großen Rechnungen, wie z.B. bei der Berechnung von 1000 Dezimalzahlen, zerlegt man die Summanden z.B. in Fünferblöcke U(I) bzw. V(I).

Die Fünferblock-Addition läuft wie folgt ab:

```
90 K = 0
100 FOR I=N TO 1 STEP -1
100 W = U(I) + V(I) + K
110 K = INT (W/10↑5)
120 W(I) = W - K * 10↑5
130 NEXT I
140 W(0) = K
```

Dabei ist N natürlich die Anzahl der Fünferblöcke.

### Zum folgenden Programm

Als Beispiel werden im Programm die Zahlen:

7830412596412348

und

914035812769267

addiert. Hier ergibt sich die Summe

8744448439181615

Das hier gezeigte Programm arbeitet mit Einerblöcken, so daß auch Nullen richtig ausgegeben werden.

```

10 REM ADDITION LANGER ZAHLEN
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " ADDITION LANGER ZAHLEN "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT : INVERSE
80 PRINT "1. SUMMAND ";; NORMAL
90 PRINT : PRINT
100 INPUT A$: PRINT : INVERSE
110 PRINT "2. SUMMAND ";; NORMAL
120 PRINT : PRINT
130 INPUT B$
140 PRINT
150 N = LEN (A$):M = LEN (B$)
160 IF N > = M THEN 190
170 H = N:N = M:M = H
180 H$ = A$:A$ = B$:B$ = H$
190 DIM U(N),V(N),W(N)
200 :
210 IF N = M THEN 260
220 FOR I = 1 TO N - M
230 B$ = "0" + B$
240 NEXT I
250 :
260 REM UMWANDLUNG IN ZAHLEN
270 FOR I = 1 TO N
280 U$ = MID$ (A$,I,1)
290 IF U$ < "0" OR U$ > "9" THEN 530
300 U(I) = VAL (U$)
310 V$ = MID$ (B$,I,1)
320 IF V$ < "0" OR V$ > "9" THEN 530
330 V(I) = VAL (V$)
340 NEXT I
350 :
360 REM STELLENWEISE ADDITION
370 J = N:K = 0
380 W = U(J) + V(J) + K

```

```

390 W(J) = W - INT (W / 10) * 10
400 K = INT (W / 10)
410 J = J - 1
420 IF J > 0 THEN 380
430 W(0) = K
440 PRINT
450 INVERSE : PRINT "SUMME = " ; : NORMAL
460 PRINT : PRINT
470 PRINT " ";
480 K = 1 - K
490 FOR I = K TO N
500 PRINT W(I);
510 NEXT I
520 GOTO 570
530 PRINT : PRINT CHR$ (7)
540 INVERSE
550 PRINT " FEHLERHAFTE EINGABE ! "
560 NORMAL
570 PRINT : PRINT
580 END

```

#### ADDITION LANGER ZAHLEN

##### 1. SUMMAND

7830412596412348

##### 2. SUMMAND

914035842769267

SUMME =

8744448439181615

## 2. Subtraktion langer Zahlen

Die Subtraktion langer Zahlen läuft als inverse Rechenoperation ähnlich wie die Addition ab. Da, wie anfangs erwähnt, auf das Rechnen mit Vorzeichen verzichtet wird, muß vorausgesetzt werden, daß der Minuend größer ist als der Subtrahend. Ist dies nicht der Fall, so vertauscht man Minuend mit Subtrahend und versieht die Differenz mit einem negativen Vorzeichen.

Wird der Minuend durch das Feld  $U(I)$ , der Subtrahend durch  $V(I)$  dargestellt, so kann bei ziffernweiser Subtraktion das Subtrahieren wie folgt beschrieben werden:

```
90 K = 0
100 FOR I=N TO 1 STEP -1
110 W = U(I) - V(I) + K
120 K = INT(W/10)
130 W(I) = W - K * 10
140 NEXT I
```

Dabei ist  $N$  die Länge des Minuenden,  $K$  der Übertrag. Die Differenz ist im Feld  $W(I)$  gespeichert. Übersteigt der Subtrahend den Minuend, so wird eine entsprechende Fehlermeldung ausgegeben.

Bei sehr großen Rechnungen, wie z.B. bei der Berechnung von Fünferblöcke  $U(I)$  bzw.  $V(I)$ .

Die Fünferblock-Subtraktion läuft wie folgt ab:

```
90 K = 0
100 FOR I=N TO 1 STEP -1
100 W = U(I) - V(I) - K
110 IF W >= 0 THEN K = 0: GOTO 130
120 K = 1: W = W + 10↑5
130 W(I) = W
140 NEXT I
```

Dabei ist  $N$  natürlich die Anzahl der Fünferblöcke.

### Zum folgenden Programm

Als Beispiel werden im Programm die Zahlen:

784103516910456

und

9541217036428

subtrahiert. Es ergibt sich die Differenz

774562299874028

```

100 REM SUBTRAKTION LANGER ZAHLEN
110 :
120 HOME
130 INVERSE
140 PRINT " "
150 PRINT " SUBTRAKTION LANGER ZAHLEN "
160 PRINT " "
170 NORMAL : PRINT
180 INVERSE : PRINT " MINUEND: "
190 NORMAL
200 PRINT
210 INPUT A$
220 PRINT : PRINT : INVERSE
230 PRINT " SUBTRAHEND: "
240 NORMAL : PRINT
250 INPUT B$
260 PRINT
270 :
280 N = LEN (A$):M = LEN (B$)
290 IF N < M THEN 560
300 DIM U(N),V(N),W(N)
310 :
320 IF N = M THEN 370
330 FOR I = 1 TO N - M
340 B$ = "0" + B$
350 NEXT I
360 :
370 REM UMWANDLUNG IN ZAHLEN
380 FOR I = 1 TO N
390 U$ = MID$ (A$,I,1)
400 U(I) = VAL (U$)
410 IF U$ < "0" OR U$ > "9" THEN 690
420 V$ = MID$ (B$,I,1)
430 IF V$ < "0" OR V$ > "9" THEN 690
440 V(I) = VAL (V$)
450 NEXT I
460 :
470 REM STELLENWEISE SUBTRAKTION

```

```

480 J = N:K = 0
490 W = U(J) - V(J) + K
500 K = INT (W / 10)
510 W(J) = W - K * 10
520 J = J - 1
530 IF J > 0 THEN 490
540 W(0) = K
550 IF K < > - 1 THEN 600
560 INVERSE
570 PRINT CHR$(7);" MINUEND KLEINER ALS SUBTRAHEND ! "
580 NORMAL : END
590 :
600 INVERSE
610 PRINT " DIFFERENZ = ": NORMAL
620 PRINT : PRINT " ";
630 K = 0
640 IF W(K) = 0 THEN K = K + 1: GOTO 640
650 FOR I = K TO N
660 PRINT W(I);
670 NEXT I
680 GOTO 720
690 PRINT : INVERSE
700 PRINT CHR$(7);" UNERLAUBTE EINGABE ! "
710 NORMAL
720 PRINT : PRINT
730 END

```

# SUBTRAKTION LANGER ZAHLEN

MINUEND:

784103516910456

SUBTRAHEND:

9541217036428

DIFFERENZ =

774562299874028

### 3. Multiplikation langer Zahlen

Nicht ganz so einfach wie die Addition und Subtraktion ist die Multiplikation langer Zahlen.

Wird der größere Faktor stellenweise in das Feld U(I) und der zweite in V(I) zerlegt, so läßt sich die stellenweise Multiplikation wie folgt programmieren:

```
100 FOR J = M TO 1 STEP -1
110 IF V(J) = 0 THEN W(J) = 0: GOTO 190
120 K = 0
130 FOR I=N TO 1 STEP -1
140 T = U(I) * V(J) + W(I+J) + K
150 W(I+J) = T - INT(T/10) * 10
160 K = INT(T/10)
170 NEXT I
180 W(J) = K
190 NEXT J
```

Dabei ist M die Stellenzahl des größeren Faktors, N die des kleineren Faktors. Im Feld W(I) wird die Ziffernfolge des Produkts gespeichert.

Ähnlich, wie bei der Addition und Subtraktion, könnte man auch die Multiplikation in Dreier- bzw. Viererblöcken durchführen.

#### Zum folgenden Programm

Das Programm berechnet nach dem oben angegebenen Verfahren das Produkt zweier langer Zahlen.

Als 1. Beispiel wird die Zahl

9999999999999999

quadriert. Es ergibt sich

99999999999999998000000000000001

Im 2. Beispiel werden die beiden Primfaktoren

59649589127497217

und

5704689200685129054721

der Zahl

$$2^{128} + 1$$

miteinander multipliziert. Diese Primzahlfaktorisierung gelang erst 1970 den Amerikanern Morrison und Brillhart, obwohl man schon sehr lange wußte, daß diese Zahl keine Primzahl ist.

Das Programm liefert

340 82366 92093 84634 63374 60743 17682 11457

(vgl. Programmausdruck).

1	2								
2	4	3							
3	6	9	4						
4	8	12	16	5					
5	10	15	20	25	6				
6	12	18	24	30	36				
7	14	21	28	35	42	49			
8	16	24	32	40	48	56	64		
9	18	27	36	45	54	63	72	81	

Lern wol mit fleiß das ein mal ein Sowirt  
Dir alle rechnung gemein

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	4	6	8	10	12	14	16	18	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	
4	8	12	16	20	24	28	32	36	
5	10	15	20	25	30	35	40	45	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	
7	14	21	28	35	42	49	56	63	
8	16	24	32	40	48	56	64	72	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	

"Multiplikationstafel aus der Arithmetik von Johannes  
Widmann, Leipzig (1489)"

```

100 REM MULTIPLIKATION LANGER ZAHLEN
110 :
120 HOME : INVERSE
130 PRINT "
140 PRINT " MULTIPLIKATION LANGER ZAHLEN "
150 PRINT "
160 NORMAL : PRINT : INVERSE
170 PRINT " 1.FAKTOR: ": NORMAL
180 PRINT
190 INPUT A$
200 PRINT : INVERSE
210 PRINT " 2.FAKTOR: ": NORMAL
220 PRINT
230 INPUT B$
240 PRINT
250 :
260 REM GROESSEREN FAKTOR BESTIMMEN
270 N = LEN (A$):M = LEN (B$)
280 IF N > = M THEN 310
290 H$ = A$:A$ = B$:B$ = H$
300 H = N:N = M:M = H
310 DIM U(N),V(M),W(M + N)
320 :
330 REM UMWANDLUNG IN ZAHLEN
340 FOR I = 1 TO N
350 U$ = MID$ (A$,I,1)
360 IF U$ < "0" OR U$ > "9" THEN 700
370 U(I) = VAL (U$)
380 NEXT I
390 FOR I = 1 TO M
400 V$ = MID$ (B$,I,1)
410 IF V$ < "0" OR V$ > "9" THEN 700
420 V(I) = VAL (V$)
430 NEXT I
440 FOR I = M + 1 TO M + N
450 W(I) = 0
460 NEXT I
470 J = M

```

```

480 :
490 REM STELLENWEISE MULTIPLIKATION
500 IF V(J) = 0 THEN W(J) = 0: GOTO 580
510 I = N:K = 0
520 T = U(I) * V(J) + W(I + J) + K
530 W(I + J) = T - INT (T / 10 + .00001) * 10
540 K = INT (T / 10)
550 I = I - 1
560 IF I > 0 THEN 520
570 W(J) = K
580 J = J - 1
590 IF J > 0 THEN 500
600 :
610 INVERSE
620 PRINT " PRODUKT = "
630 NORMAL : PRINT : PRINT " ";
640 K = 1
650 IF W(K) = 0 THEN K = K + 1: GOTO 650
660 FOR I = K TO N + M
670 PRINT W(I);
680 NEXT I
690 GOTO 730
700 INVERSE
710 PRINT CHR$(7);" UNZULAESSIGE EINGABE ! "
720 NORMAL
730 PRINT : PRINT
740 END

```

MULTIPLIKATION LANGER ZAHLEN

1. FAKTOR:

?9999999999999999

2. FAKTOR:

?9999999999999999

PRODUKT =

9999999999999999800000000000000001

1. FAKTOR:

?5704689200685129054721

2. FAKTOR:

?59649589127497217

PRODUKT =

340282366920938463463374607431768211457

1. FAKTOR:

100  
101  
102  
103  
104  
105  
106  
107  
108  
109  
110  
111  
112  
113  
114  
115  
116  
117  
118  
119  
120  
121  
122  
123  
124  
125  
126  
127  
128  
129  
130  
131  
132  
133  
134  
135  
136  
137  
138  
139  
140  
141  
142  
143  
144  
145  
146  
147  
148  
149  
150  
151  
152  
153  
154  
155  
156  
157  
158  
159  
160  
161  
162  
163  
164  
165  
166  
167  
168  
169  
170  
171  
172  
173  
174  
175  
176  
177  
178  
179  
180  
181  
182  
183  
184  
185  
186  
187  
188  
189  
190  
191  
192  
193  
194  
195  
196  
197  
198  
199  
200

## 4. Division langer Zahlen

Wesentlich komplizierter als Addition und Multiplikation ist die Division langer Zahlen.

Das Programm führt eine stellenweise Division durch, entsprechend dem schriftlichen Rechnen. Zuerst wird geprüft, wie oft der Divisor in den Dividenten hineingeht. Sodann wird der Divisor mit dem entsprechenden Vielfachen multipliziert. Diese Multiplikation einer langen Zahl mit einem einstelligen Faktor wird bei Programm 5 erklärt. Das sich ergebende Produkt muß noch vom Dividenten subtrahiert werden. Der genaue Algorithmus kann dem folgenden Programm entnommen werden.

### Zum folgenden Programm

Als Beispiel wird die schon aus dem Programm 3 bekannte Zahl

$$2^{128} + 1$$

durch den Primfaktor

$$59649589127497217$$

dividiert. Das Programm liefert den ganzzahligen Quotienten

$$5704689200685129054721$$

Das Programm ist so aufgebaut, daß Zahlenwerte sowohl aus DATA-Zeilen, als auch über INPUT-Anweisungen übernommen werden können. Sollen DATA-Zeilen gelesen werden, dann müssen die Programmzeilen 100 und 140 entfallen bzw. durch eine vorgestellte REM-Anweisung unwirksam gemacht werden.

```

10 REM DIVISION LANGER ZAHLEN
20 :
30 HOME
40 INVERSE
50 PRINT " "
60 PRINT " DIVISION LANGER ZAHLEN "
70 PRINT " "
80 NORMAL : PRINT : PRINT
90 INVERSE : PRINT " DIVIDEND ";; NORMAL
100 INPUT A$: GOTO 120
110 READ A$: PRINT A$
120 PRINT : PRINT
130 INVERSE : PRINT " DIVISOR ";; NORMAL
140 INPUT B$: GOTO 160
150 READ B$: PRINT B$
160 PRINT : PRINT
170 :
180 M = LEN (A$):N = LEN (B$)
190 M = M - N
200 IF M < 0 THEN PRINT CHR$ (7);"EINGABEFehler !": END
210 DIM U(N + M),V(N),W(N),Q(M)
220 :
230 FOR I = 1 TO M + N
240 U(I) = VAL ( MID$ (A$,I,1))
250 NEXT I
260 FOR I = 1 TO N
270 V(I) = VAL ( MID$ (B$,I,1))
280 NEXT I
290 :
300 D = INT (10 / (V(1) + 1)):U(0) = 0
310 IF D = 1 THEN 470
320 K = 0
330 FOR I = N + M TO 1 STEP - 1
340 U = U(I) * D + K
350 K = INT (U / 10)
360 U(I) = U - K * 10
370 NEXT I
380 U(0) = K

```

```

390 :
400 K = 0
410 FOR I = N TO 1 STEP - 1
420 V = V(I) * D + K
430 K = INT (V / 10)
440 V(I) = V - K * 10
450 NEXT I
460 V(0) = K
470 :
480 J = 0
490 IF U(J) = V(1) THEN Q = 9: GOTO 520
500 IF V(1) = 0 THEN PRINT CHR$(7); "FUEHRENDE NULL !": END
510 Q = INT ((U(J) * 10 + U(J + 1)) / V(1))
520 Q1 = (U(J) * 10 + U(J + 1) - Q * V(1)) * 10 + U(J + 2)
530 IF V(2) * Q <= Q1 THEN 560
540 Q = Q - 1: GOTO 520
550 :
560 K = 0
570 FOR I = N TO 1 STEP - 1
580 W = V(I) * Q + K
590 K = INT (W / 10)
600 W(I) = W - K * 10
610 NEXT I
620 W(0) = K
630 :
640 K = 0: F = 0
650 FOR I = J + N TO J STEP - 1
660 U = U(I) - W(I - J) + K
670 K = INT (U / 10)
680 U(I) = U - K * 10
690 NEXT I
700 IF K = - 1 THEN F = 1
710 :
720 Q(J) = Q
730 IF F = 0 THEN 830
740 Q(J) = Q(J) - 1
750 K = 0
760 FOR I = J + N TO J STEP - 1
770 U = U(I) + V(I - J) + K
780 K = INT (U / 10)

```

```

790 U(I) = U - K * 10
800 NEXT I
810 U(J - 1) = U(J - 1) + K
820 :
830 J = J + 1
840 IF J < = M THEN 490
850 :
860 K = 0
870 FOR I = M + 1 TO M + N
880 U = U(I) + K * 10
890 U(I) = INT (U / D)
900 K = U - INT (U / D) * D
910 NEXT I
920 :
930 J = 0: REM  AUSGABE
940 INVERSE : PRINT " QUOTIENT ";; NORMAL
950 PRINT " ";
960 IF Q(J) = 0 THEN J = J + 1: GOTO 960
970 FOR I = J TO M
980 PRINT Q(I);
990 NEXT I: PRINT ".";
1000 FOR I = M + 1 TO N + M
1010 PRINT U(I);
1020 NEXT I
1030 PRINT : PRINT
1040 END
1050 DATA "340282366920938463463374607431768211457"
1060 DATA "59649589127497217"

```

DIVISION LANGER ZAHLEN

DIVIDEND 340282366920938463463374607431768211457

DIVISOR 59649589127497217

QUOTIENT 5704689200685129054721.000000000000000000



## 5. Potenzieren

Eine weitere Anwendung der Mehr-Register-Arithmetik liefert das Potenzieren, da hier sehr schnell große Zahlen auftreten.

Das Potenzieren wird im Programm als wiederholte Multiplikation durchgeführt. Eine andere Möglichkeit wäre das logarithmische Rechnen, jedoch ist die mehrfachen genaue Berechnung von Logarithmen noch aufwendiger.

Teilt man die mit B zu multiplizierende Zahl in Achterblöcke R(I), so kann die Multiplikation wie folgt durchgeführt werden:

```
100 U = 0
110 FOR I=1 TO R
120 H = R(I) * B + U
130 IF H <= -1E8 THEN U = 0: GOTO 160
140 U = INT (H/1E8)
150 H = H - U * 1E8
160 R(I) = H
170 NEXT I
```

Dabei ist R die Anzahl der Achterblöcke und U der jeweilige Überlauf.

Soll die Zahl B zur N-ten Potenz erhoben werden, so muß das angegebene Programmstück noch in die Schleife

```
FOR K=1 TO N . . . . . NEXT K
```

eingebaut werden.

Die benötigte Anzahl der Achterblöcke wird logarithmisch berechnet: Der Zehnerlogarithmus der gesuchten Potenz  $B^N$  ist

$$N * \text{LOG}(B) / \text{LOG}(10)$$

Da der aufgerundete Zehnerlogarithmus einer Zahl die Stellenzahl angibt, kann daraus durch Division mit 8 die notwendige Registerzahl R berechnet werden.

### Zum folgenden Programm

Das Programm berechnet nach dem oben beschriebenen Verfahren beliebige Potenzen mit einstelliger Basis.

Soll die Basis mehrstellig sein, so wird empfohlen die Registerzahl entsprechend zu vermindern. Dazu müssen alle Achter im Programm durch 7 bzw. 6 ersetzt werden.

Als Beispiel wird die hundertste Potenz von 2 berechnet. Es ergibt sich:

1267650 60022822 94014967 032053756

(vgl. Programmausdruck).

```

100 REM  BERECHNUNG GROSSER POTENZEN
110 :
120 HOME : INVERSE
130 PRINT " "
140 PRINT " BERECHNUNG GROSSER POTENZEN "
150 PRINT " "
160 NORMAL : PRINT : PRINT
170 INVERSE : PRINT " BASIS " ;: NORMAL
180 INPUT B: INVERSE : PRINT : PRINT
190 PRINT " EXPONENT " ;: NORMAL
200 INPUT N
210 PRINT : PRINT : INVERSE
220 PRINT " ";B;" HOCH ";N;" = "
230 NORMAL : PRINT : PRINT
240 DIM R(100)
250 :
260 REM  ZAHL DER 8-ER BLOECKE
270 R = N * LOG (B) / LOG (10)
280 R = INT (R / 8) + 1
290 :
300 REM  MULTIPLIKATIONSSCHLEIFE
310 U = 0:R(1) = 1
320 FOR K = 1 TO N
330 FOR I = 1 TO R
340 H = R(I) * B + U
350 IF H < - 1E8 THEN U = 0: GOTO 380
360 U = INT (H / 1E8)
370 H = H - U * 1E8
380 R(I) = H
390 NEXT I
400 NEXT K
410 :
420 REM  AUSGABE
430 F$ = " "
440 FOR I = R TO 1 STEP - 1
450 R$ = STR$ (R(I))
460 IF LEN (R$) < 8 THEN R$ = F$ + R$: GOTO 460
470 PRINT R$;" ";

```

```
480 IF (R - I + 1) / 4 = INT ((R - I + 1) / 4) THEN PRINT
490 F$ = "0"
500 NEXT I
510 PRINT : PRINT
520 END
```

#### BERECHNUNG GROSSER POTENZEN

BASIS ?2

EXPONENT ?100

2 HOCH 100 =

1267650 60022822 94014967 03205376

## 6. FAKULTÄTS-BERECHNUNG

Die Berechnung der Fakultäts-Funktion liefert ebenfalls eine Anwendung der Mehr-Register-Arithmetik. Die Fakultätsfunktion  $n!$ , definiert als das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis  $n$ , wächst nämlich noch schneller als eine Potenzfunktion.

Die Fakultätsberechnung wird im Programm als wiederholte Multiplikation durchgeführt. Eine andere Möglichkeit wäre auch hier das logarithmische Rechnen, jedoch ist die mehrfachgenaue Berechnung von Logarithmen noch aufwendiger. Die Multiplikation erfolgt nach dem bei Programm 5 angegebenen Verfahren.

Komplizierter ist nur die Berechnung der benötigten Register. Sie erfolgt ebenfalls logarithmisch. Da der Logarithmus eines Produkts gleich der Summe der Logarithmen ist, ergibt sich  $\log(n!)$  aus

```
100 FOR I=2 TO N
110 L=L+LOG(I)
120 NEXT I
```

Da die so ermittelte Zahl  $L$ , aufgerundet die Stellenzahl angibt, ist  $L/6$  die benötigte Anzahl von Sechserblöcken. Da der Computer jedoch mit natürlichen Logarithmen rechnet, muß die Zahl zuvor über den Faktor

$$\ln(10) = .4342945$$

auf den Zehnerlogarithmus umgerechnet werden.

### Zum folgenden Programm

Das Programm berechnet die Fakultätsfunktion für dreistellige Zahlen in Sechserblöcken. Ist die Fakultät einer größeren Zahl gesucht, so wird aus Genauigkeitsgründen empfohlen mit Fünfer- bzw. Viererblöcken zu rechnen. Dazu müssen die im Programm auftretenden Sechsen entsprechend ersetzt werden.

Als Programmbeispiel wird

100 !

berechnet. Das Ergebnis kann dem Programmausdruck entnommen werden.

```

10 REM FAKULTAET GROSSER ZAHLEN
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT "
50 PRINT " FAKULTAET GROSSER ZAHLEN "
60 PRINT "
70 NORMAL : PRINT : PRINT : INVERSE
80 PRINT " WELCHE FAKULTAET " ; NORMAL
90 PRINT : PRINT
100 INPUT N
110 PRINT : PRINT
120 INVERSE
130 PRINT " "; N ; " ! = "
140 NORMAL : PRINT
150 DIM R(100)
160 :
170 REM ZAHL DER 6-ER BLOECKE
180 L = 1
190 R(1) = 1
200 FOR I = 2 TO N
210 L = L + LOG (I)
220 NEXT I
230 L = L * .4342945
240 R = INT (L / 6) + 1
250 :
260 FOR I = 2 TO R
270 R(I) = 0
280 NEXT I
290 L = 1
300 FOR I = N TO 2 STEP - 1
310 L = L + LOG (I) * .4342945
320 R = INT (L / 6) + 1
330 :
340 REM MULTIPLIKATIONSSCHLEIFE
350 U = 0
360 FOR J = 1 TO R
370 H = R(J) * I + U
380 IF H < - 1E6 THEN U = 0: GOTO 410

```

```

390 U = INT (H / 1E6)
400 H = H - U * 1E6
410 R(J) = H
420 NEXT J
430 NEXT I
440 :
450 REM  AUSGABE
460 FOR I = R TO 1 STEP - 1
470 IF R(I) = 0 THEN PRINT "000000 ";; GOTO 510
480 R$ = STR$ (R(I))
490 IF LEN (R$) < 6 THEN R$ = "0" + R$: GOTO 490
500 PRINT R$;" ";
510 IF (R - I + 1) / 5 = INT ((R - I + 1) / 5) THEN PRINT
520 NEXT I
530 PRINT : PRINT
540 END

```

FAKULTAET GROSSER ZAHLEN

WELCHE FAKULTAET

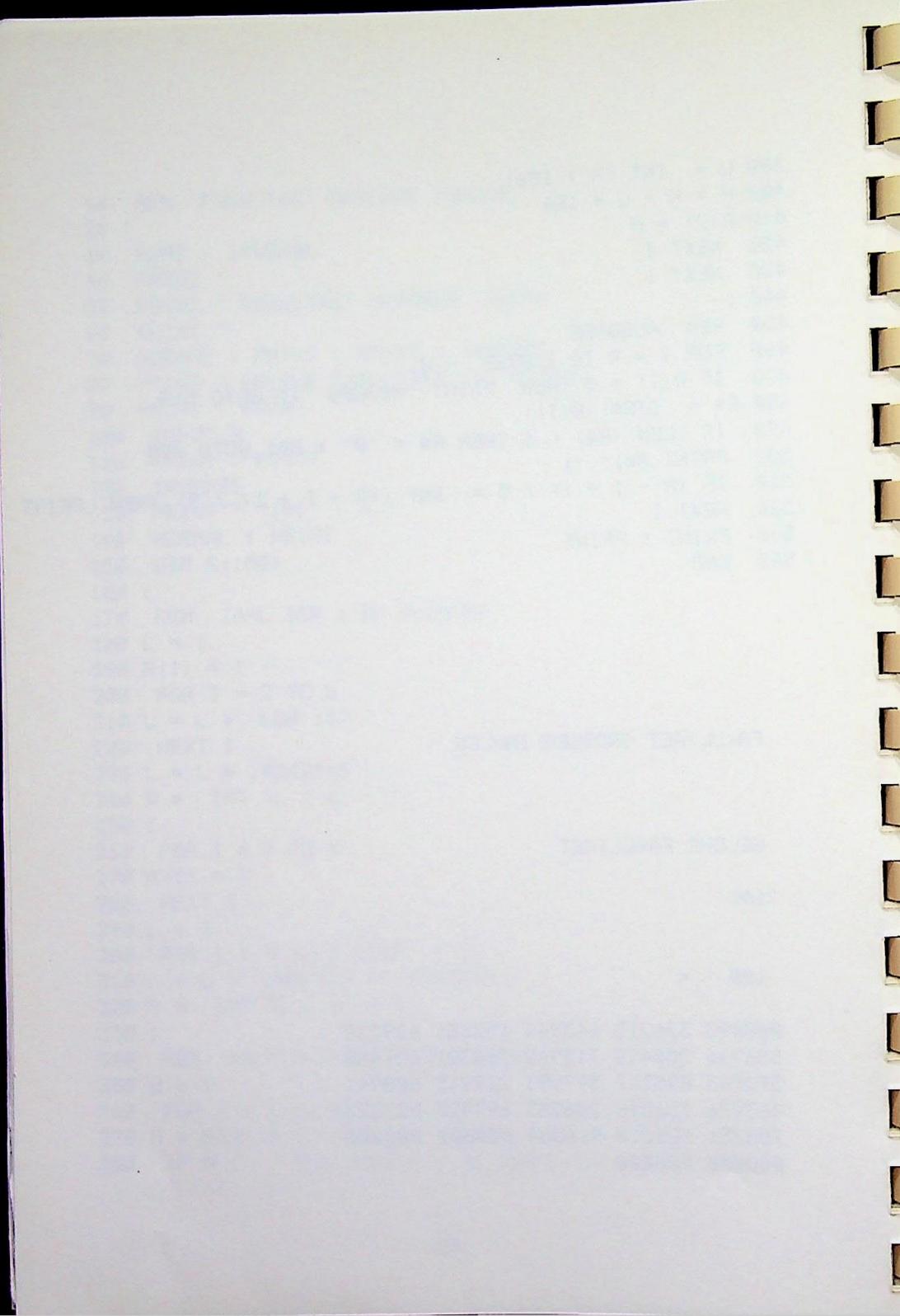
?100

100 ! =

```

000093 326215 443944 152681 699238
856266 700490 715968 264381 621468
592963 895217 599993 229915 608941
463976 156518 286253 697920 827223
758251 185210 916864 000000 000000
000000 000000

```



## 7. $\pi$ AUF 1000 STELLEN

Als weitere Anwendungen der in den Programmen 1 – 4 angegebenen Mehr-Register-Arithmetik werden noch 2 mathematische Konstanten auf jeweils 1000 Stellen berechnet.

Die Kreiszahl  $\pi$ , definiert als

Kreisumfang/Durchmesser

ist wohl die berühmteste aller mathematischen Konstanten. Sie ist auch kulturhistorisch interessant, da die Genauigkeit, mit der ein Volk  $\pi$  bestimmt hat, Auskunft über das erreichte mathematische Niveau gibt.

Während in älteren babylonischen Keilschrifttafeln die Kreiszahl zu 3 bestimmt, zeigen die 1936 in Susa ausgegrabenen Tafeln den Wert

$$3 \ 7'30''$$

Rechnet man diesen Wert aus dem 60er-System um, so ergibt sich

$$3 + 7/60 + 30/3600$$

oder

$$3 \ 1/8.$$

Bemerkenswert genau ist auch der ägyptische Wert: Der Papyrus Rhind gibt  $\pi$  als das  $(\frac{8}{9})^2$ -fache des Durchmessers an. Dies liefert

$$3 \ 13/81.$$

Die semitischen Völker rechneten mit dem Wert 3, der sich zweimal in der Bibel findet:

“Es maß 10 Ellen von einem Rand zum anderen. Eine Schnur von 30 Ellen umspannte es ringsum“ (1. Könige 7,23; 2. Chronik 4,2). Archimedes (287 – 212 v. Chr.) gibt die Schranken

$$223/71 < \pi < 22/7$$

an. Ptolemäus rechnet 400 Jahre später mit dem Mittelwert aus diesen Schranken

$$3 \ 17/120.$$

Um 500 n. Chr. fanden die Chinesen mit dem sehr genauen Wert

$$355/113 = 3.1415929. .$$

Die Inder sahen zur gleichen Zeit

$$3927/1250 = 3.1416$$

als genauen Wert an, rechneten aber meist mit

$$\sqrt{10} = 3.1623. .$$

Erst 1610 gelang van Ceulen, wie in der Einleitung erwähnt, mit 35 Dezimalstellen eine wesentliche Genauigkeitssteigerung.

In der Folgezeit wurde  $\pi$  zunehmend genauer berechnet. Zuletzt gelang es E. Salamin 1976 mit Hilfe eines Großcomputers  $\pi$  auf 33 Millionen Dezimalstellen zu berechnen. Natürlich hat diese Genauigkeit keinerlei praktische Bedeutung, die Dezimalbruchentwicklung wurde jedoch als idealer Zufallszahlengenerator erkannt. Eine Wiederholung von Dezimalstellen ist dabei ausgeschlossen, da man weiß, daß  $\pi$  eine transzendente Zahl (d.h. nicht Nullstelle eines Polynoms) ist und somit eine nichtperiodische Entwicklung hat. Der Transzendenzbeweis erfolgte 1882 durch Lindemann.

Eine genauere Approximation, als die oben gegebenen Werte darstellen, durch eine Bruchzahl kann man mit Programm 10 erhalten. Gibt man dort  $\pi$  auf 8 Dezimalstellen ein, so erhält man

251690445/80115557

Die Computerrechnungen stützen sich alle auf folgende Darstellungen von  $\pi$ :  
Formel von Machin:

$$\pi = 16 \arctan (1/5) - 4 \arctan (1/239)$$

$$\pi = 16 * \arctan (1/5) - 4 * \arctan (1/70) + 4 \arctan (1/99)$$

oder die Formel von Gauß

$$\pi = 48 \arctan (1/18) + 32 \arctan (1/57) - 20 \arctan (1/239).$$

Die Reihenentwicklung des arctan

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \dots + \dots$$

gültig für  $|x| < 1$  konvergiert umso schneller, je kleiner  $x$  ist. Insofern wäre die Gaußsche Formel vorzuziehen, jedoch muß die Reihenentwicklung dreimal ausgewertet werden. Daher benützt man meist die Formel von Machin.

Die ungeraden Potenzen der Reihenentwicklung erhält man aus der 1. Potenz durch fortgesetztes Multiplizieren mit dem Quadrat von  $x$  bzw. durch Division durch das Quadrat des Nenners.

Diese Division einer langen Zahl mit den Stellen U(I) durch die kurze Zahl D kann mit Hilfe von folgendem Programmstück durchgeführt werden:

```
100 K = 0
110 FOR I=1 TO N
120 U = U(I) + 10 * K
130 U(I) = INT(U/D)
140 K = U - INT(U/D) * D
150 NEXT I
```

Dabei ist N die Stellenzahl und K der jeweilige Übertrag. Bemerkenswert ist, daß die Zahl  $\pi$  auch zweimal als Ergebnis eines Zufallsversuchs auftritt.

Das eine ist das berühmte Nadelproblem von Buffon. Dabei wird eine Nadel der Länge  $l$  zufällig auf ein Parallelgitter vom Abstand  $d$  geworfen ( $l < d$ ). Die Nadel trifft eine Parallele mit der Wahrscheinlichkeit

$$2l/\pi d.$$

Ein zweites Ergebnis stammt von R. Chartres: Er zeigte 1904, daß zwei zufällig ausgewählte natürliche Zahlen mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{6}{\pi^2}$$

teilerfremd sind.

### **Zum folgenden Programm**

Es wird darin die Zahl  $\pi$  nach der Formel von Machin berechnet. Die Division durch 25 bzw. durch  $239^2$  werden mit Hilfe des angegebenen Verfahrens durchgeführt. Der sich ergebende Reihenterm wird entsprechend seinem Vorzeichen addiert bzw. subtrahiert.

Die Ausgabe erfolgt in Dreierblöcken.

Mit Hilfe des hier gegebenen Programms kann  $\pi$  auf beliebig viele Stellen berechnet werden. Dazu muß die Variable N in Zeile 110 auf 1/3 der gewünschten Stellenzahl gesetzt werden. Es ist ratsam N noch aufzurunden, damit nicht das Ergebnis durch einen Rundungsfehler verfälscht wird.

Die Laufzeit des Programms beträgt mehrere Stunden, so daß Sie entsprechende Geduld aufbringen sollten. Während des Programmlaufes erscheint auf dem Bildschirm eine Countdown-Anzeige, die über den Fortschritt der Rechnung informiert.

Die vom Programm berechneten Stellen können dem Programmausdruck entnommen werden.

```

10 REM PI AUF 1000 STELLEN
20 HOME
30 INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " PI AUF 1000 STELLEN "
60 PRINT " "
70 NORMAL
80 PRINT : PRINT
90 PRINT "AUSGABE AUF <B>ILDSCHIRM"
100 INPUT " ODER <D>RUCKER ?";P$
110 PRINT : PRINT
120 PRINT "BERECHNUNG LAEUFT"
130 N = 334
140 ZZ = N * 3
150 T = 1000: DIM R%(N,2),K(2)
160 K(1) = 25:K(2) = 239 ^ 2
170 FOR P = 1 TO 2: GOSUB 680
180 GOSUB 770:A = 1:D1 = E: GOSUB 420
190 IF V > 0 THEN GOSUB 520: GOTO 210
200 GOSUB 600
210 E = E + 2:V = - V
220 A = 0:D1 = K(P): GOSUB 420
230 HTAB 20: VTAB 10: PRINT ZZ;" "
240 ZZ = ZZ - 1
250 IF Z THEN 180
260 NEXT P
270 IF P$ = "D" THEN PR# 1: GOTO 320
280 PRINT : PRINT CHR$(7); CHR$(7)
290 PRINT "RETURN FUER AUSGABE";
300 INPUT W$
310 HOME
320 PRINT : PRINT "PI = ";
330 PRINT STR$(R%(0,2))."
340 FOR I = 1 TO N
350 IF (I - 1) / 9 = INT ((I - 1) / 9) THEN PRINT
360 X$ = STR$(R%(I,2))
370 PRINT RIGHT$("00" + X$,3)" ";
380 NEXT I
390 PRINT
400 PR# 0
410 END
420 R = 0:Z = 0

```

```

430 FOR I = 0 TO N
440 D = R * T + R%(I,A)
450 Q = D / D1
460 R = D - D1 * INT (Q)
470 Z = Z OR Q
480 R%(I,A) = Q
490 NEXT I
500 R%(N,A) = Q = .5
510 RETURN
520 C = 0
530 FOR I = N TO 0 STEP - 1
540 S = R%(I,2) + R%(I,1) + C
550 C = 0
560 IF S >= T THEN S = S - T:C = 1
570 R%(I,2) = S
580 NEXT I
590 RETURN
600 L = 0
610 FOR I = N TO 0 STEP - 1
620 D2 = R%(I,2) - R%(I,1) - L
630 L = 0
640 IF D2 < 0 THEN D2 = D2 + T:L = 1
650 R%(I,2) = D2
660 NEXT I
670 RETURN
680 FOR I = 0 TO N
690 R%(I,0) = 0: IF P = 1 THEN R%(I,2) = 0
700 NEXT I
710 R%(0,0) = 16 / P ^ 2
720 D1 = 234 * P - 229
730 A = 0
740 GOSUB 420
750 E = 1:V = 3 - 2 * P
760 RETURN
770 FOR I = 0 TO N
780 R%(I,1) = R%(I,0)
790 NEXT I
800 RETURN

```

PI = 3.

141	592	653	589	793	238	462	643	383
279	502	884	197	169	399	375	105	820
974	944	592	307	816	406	286	208	998
628	034	825	342	117	067	982	148	086
513	282	306	647	093	844	609	550	582
231	725	359	408	128	481	117	450	284
102	701	938	521	105	559	644	622	948
954	930	381	964	428	810	975	665	933
446	128	475	648	233	786	783	165	271
201	909	145	648	566	923	460	348	610
454	326	648	213	393	607	260	249	141
273	724	587	006	606	315	588	174	881
520	920	962	829	254	091	715	364	367
892	590	360	011	330	530	548	820	466
521	384	146	951	941	511	609	433	057
270	365	759	591	953	092	186	117	381
932	611	793	105	118	548	074	462	379
962	749	567	351	885	752	724	891	227
938	183	011	949	129	833	673	362	440
656	643	986	021	394	946	395	224	737
190	702	179	860	943	702	770	539	217
176	293	176	752	384	674	818	467	669
405	132	000	568	127	145	263	560	827
785	771	342	757	789	609	173	637	178
721	468	440	901	224	953	430	146	549
585	371	050	792	279	689	258	923	542
019	956	112	129	021	960	864	034	418
159	813	629	774	771	309	960	518	707
211	349	999	998	372	978	049	951	059
731	732	816	096	318	595	024	459	455
346	908	302	642	522	308	253	344	685
035	261	931	188	171	010	003	137	838
752	886	587	533	208	381	420	617	177
669	147	303	598	253	490	428	755	468
731	159	562	863	882	353	787	593	751
957	781	857	780	532	171	226	806	613
001	927	876	611	195	909	216	420	200
000								

## 8. e AUF 1000 STELLEN

Mit der Zahl  $\pi$  ist die Eulersche Zahl

$$e = 2.7182818 \dots$$

über die Gleichung

$$e^{\pi i} = -1$$

verbunden, dabei ist  $i = \sqrt{-1}$ .

e ist insbesondere als Basis der natürlichen Logarithmen von Bedeutung

$$y = \ln x \Rightarrow x = e^y$$

Ebenso stellt e den Grenzwert

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

dar. Mit diesem Grenzwert ist auch die Zinzeszinsformel verknüpft: Wird 1 DM nicht jährlich oder monatlich, sondern kontinuierlich verzinst, so wächst der Zinsezins bei 100% nicht ins Unbeschränkte, sondern nähert sich dem Wert e DM. Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion liefert eine für numerische Zwecke brauchbare Formel für e

$$e = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots$$

dabei stellt  $n!$  die Fakultätsfunktion dar.

Erwähnenswert ist, daß auch e als Ergebnis eines Zufallsexperiments auftritt. Werden  $n$  Dinge zufällig angeordnet, so ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$1/e = 0.3678794.$$

kein Gegenstand an seinem Ort. Solche Zufallsexperimente können mit Hilfe von Programm 12 erhalten werden. Der Versuch ist besser bekannt als das Problem der "vertauschten Briefe". Legt man  $n$  Briefe zufällig in  $n$  vorbereitete Umschläge, so liegt mit der Wahrscheinlichkeit

$$1 - 1/e = 0.6321205$$

mindestens ein Brief im richtigen Umschlag. Im Band 1 der vorliegenden Programmsammlung findet sich für  $n = 5$  ein Grafikprogramm.

### Zum folgenden Programm

Das Programm berechnet die Dezimalbruchentwicklung von  $e$  mit Hilfe der angegebenen Reihenentwicklung. Die Kehrwerte der benötigten Fakultäten werden durch wiederholte Divisionen berechnet und fortlaufend aufsummiert.

Das hier angegebene Programm läßt sich auf beliebige Stellenzahl ausdehnen. Die Variable  $N$  in Zeile 180 muß dazu so geändert werden, daß die Dezimalstellen von  $1/N!$  bei der gewünschten Genauigkeit vernachlässigt werden können.

```

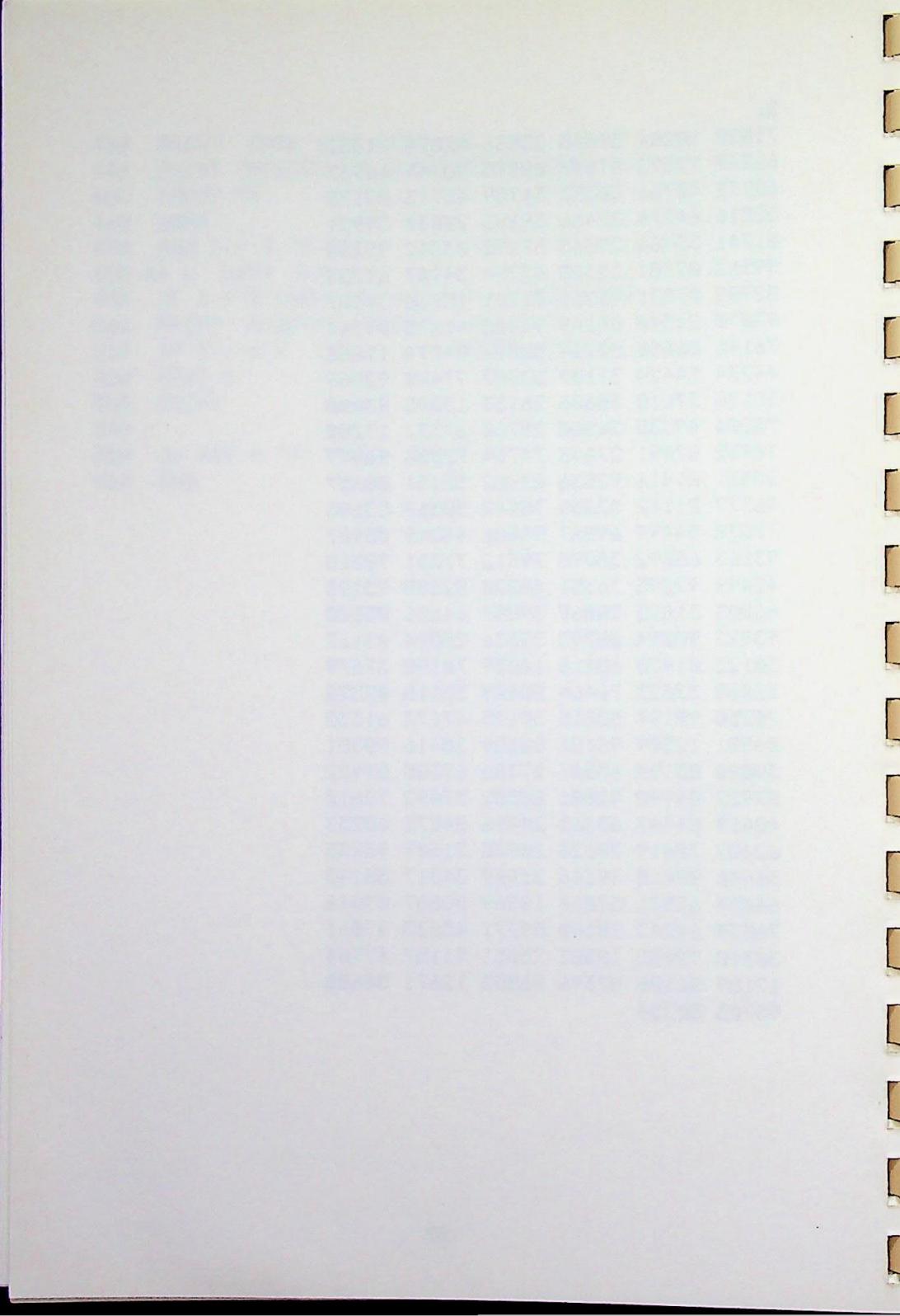
10 REM     E AUF 1000 STELLEN
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT "
50 PRINT " E AUF 1000 STELLEN "
60 PRINT "
70 NORMAL
80 PRINT
90 PRINT "DRUCKERAUSGABE <J/N> ";
100 INPUT PR$
110 PRINT : PRINT "FELD ANLEGEN"
120 DIM A(202)
130 FOR I = 1 TO 202
140 A(I) = 0
150 NEXT I
160 :
170 PRINT
180 PRINT "BERECHNUNG LAEUFT...": PRINT
190 B = 1E5:A(0) = 1
200 FOR N = 450 TO 1 STEP - 1
210 HTAB 25: VTAB 9: PRINT N;" ";
220 FOR I = 0 TO 201
230 Q = INT (A(I) / N)
240 R = A(I) - Q * N
250 A(I) = Q
260 A(I + 1) = A(I + 1) + B * R
270 NEXT I
280 A(0) = A(0) + 1
290 NEXT N
300 :
310 REM RUNDUNG
320 PRINT : PRINT
330 PRINT "RUNDUNG AUSFUEHREN..."
340 A(201) = A(201) + INT (A(202) / B + .5)
350 FOR I = 200 TO 1 STEP - 1
360 U = INT (A(I) / B)
370 A(I) = A(I) - B * U
380 A(I - 1) = A(I - 1) + U
390 NEXT I
400 :
410 REM AUSGABE
420 IF PR$ = "J" THEN PR# 1: GOTO 470

```

```
430 PRINT CHR$ (7); CHR$ (7)
440 PRINT "WEITER MIT AUSGABE <RETURN> ";
450 INPUT T$
460 HOME
470 FOR I = 0 TO 200
480 A$ = STR$ (A(I))
490 IF I = 0 THEN PRINT A$;".": GOTO 520
500 PRINT RIGHT$ ("0000" + A$,5);" ";
510 IF I / 6 = INT (I / 6) THEN PRINT
520 NEXT I
530 PRINT
540 :
550 IF PR$ = "J" THEN PR# 0
560 END
```

2.

71828	18284	59045	23536	02874	71352
66249	77572	47093	69995	95749	66967
62772	40766	30353	54759	45713	82178
52516	64274	27466	39193	20030	59921
81741	35966	29043	57290	03342	95260
59563	07381	32328	62794	34907	63233
82988	07531	95251	01901	15738	34187
93070	21540	89149	93488	41675	09244
76146	06680	82264	80016	84774	11853
74234	54424	37107	53907	77449	92069
55170	27618	38606	26133	13845	83000
75204	49338	26560	29760	67371	13200
70932	87091	27443	74704	72306	96977
20931	01416	92836	81902	55151	08657
46377	21112	52389	78442	50569	53696
77078	54499	69967	94686	44549	05987
93163	68892	30098	79312	77361	78215
42499	92295	76351	48220	82698	95193
66803	31825	28869	39849	64651	05820
93923	98294	88793	32036	25094	43117
30123	81970	68416	14039	70198	37679
32068	32823	76464	80429	53118	02328
78250	98194	55815	30175	67173	61332
06981	12509	96181	88159	30416	90351
59888	85193	45807	27386	67385	89422
87922	84998	92086	80582	57492	79610
48419	84443	63463	24496	84875	60233
62482	70419	78623	20900	21609	90235
30436	99418	49146	31409	34317	38143
64054	62531	52096	18369	08887	07016
76839	64243	78140	59271	45635	49061
30310	72085	10383	75051	01157	47704
17189	86106	87396	96552	12671	54688
95703	50354				



## 9. LINEARE DIOPHANTISCHE GLEICHUNG

Ein Standardverfahren zur Lösung einer linearen Diophantischen Gleichung

$$ax + by = c$$

gleichbedeutend mit der Kongruenz

$$ax = c \pmod{y}$$

ist der erweiterte Euklidische Algorithmus. Mit seiner Hilfe kann der größte gemeinsame Teiler

$$\text{ggT}(a,b)$$

als Linearkombination von  $a$  und  $b$  bestimmt werden.

Dies soll an einem Beispiel für  $a = 286$  und  $b = 121$  gezeigt werden:

$$262 : 121 = 2 \text{ Rest } 44 \Rightarrow 286 = 2 \cdot 121 + 44$$

$$121 : 44 = 2 \text{ Rest } 33 \Rightarrow 121 = 2 \cdot 44 + 33$$

$$44 : 33 = 1 \text{ Rest } 11 \Rightarrow 44 = 1 \cdot 33 + 11$$

$$33 : 11 = 3 \quad \Rightarrow 33 = 3 \cdot 11$$

Somit gilt

$$\text{ggT}(286, 121) = 11$$

Durch Rückwärtsrechnen folgt

$$\begin{aligned} 11 &= 44 - 33 \\ &= 44 - (121 - 2 \cdot 44) \\ &= 3 \cdot 44 - 121 \\ &= 3 \cdot (286 - 2 \cdot 121) - 121 \\ &= 3 \cdot 286 - 7 \cdot 121 \end{aligned}$$

Dies liefert die gesuchte Linearkombination

$$3 \cdot 286 - 7 \cdot 121 = 11$$

allgemein

$$ax + by = \text{ggT}(a,b)$$

Sind  $x_0, y_0$  die Koeffizienten der Linearkombination, so hat die Diophantische Gleichung

$$ax + by = c$$

die allgemeine Lösung:

$$x = cx_0 + \frac{a}{\text{ggT}(a,b)} \cdot t$$

$$y = cy_0 - \frac{b}{\text{ggT}(a,b)} \cdot t; t \text{ ganzzahlig}$$

Diese Lösung existiert nur, wenn  $c$  ein Vielfaches von  $\text{ggT}(a,b)$  ist; andernfalls ist die Gleichung nicht lösbar (vgl. [7]).

### Zum folgenden Programm

Das Programm berechnet mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus nach dem oben angegebenen Verfahren eine spezielle Lösung der Gleichung

$$ax + by = \text{ggT}(a,b).$$

Damit wird die allgemeine Lösung bestimmt.

Das im Programm angegebene Verfahren kann prinzipiell auch für Diophantische Gleichungen der Form

$$ax - by = c$$

( $b > 0$ ) angewandt werden. In diesem Fall ergibt sich für den  $\text{ggT}$  ein negativer Wert, im Gegensatz zur üblichen Definition. Dazu müssen die Zeilen 120 und 130 gelöscht werden; zwei aufeinander stoßende negative Vorzeichen sind als positiv zu lesen.

Als Beispiel wird die Diophantische Gleichung

$$17x + 6y = 5$$

gelöst. Das Programm liefert die Parameterlösung

$$\begin{aligned}x &= -5 - 6t \\y &= 15 + 17t\end{aligned}$$

dabei durchläuft  $t$  alle ganzen Zahlen. Für jeden Wert von  $t$  ergibt sich wieder eine spezielle Lösung, z.B. für

$$\begin{aligned}t = 0 &: x = -5, y = 15 \\t = 1 &: x = -11, y = 32 \\t = -1 &: x = 1, y = -2\end{aligned}$$

usw. Zahlreiche Diophantische Gleichungen findet man in eingekleideter Form in den historischen Aufgaben des Anhangs.

```

10 REM LINEARE DIOPHANTISCHE GLEICHUNG
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " DIOPHANTISCHE GLEICHUNG "
60 PRINT " "
70 PRINT "          A*X + B*Y = C "
80 PRINT " "
90 NORMAL
100 PRINT : PRINT
110 INPUT "EINGABE A,B,C ? ";A,B,C: GOTO 140
120 IF A > 0 AND B > 0 THEN 170
130 PRINT "A UND B MUESSEN POSITIV SEIN": GOTO 110
140 :
150 PRINT "-----"
160 PRINT
170 A0 = A:A1 = B
180 X0 = 1:Y1 = 1
190 Y0 = 0:X1 = 0
200 :
210 REM ERWEITETER EUKLIDSCHER ALGORITHMUS
220 Q = INT (A0 / A1)
230 IF A0 / A1 = Q THEN 320
240 A2 = A0 - Q * A1
250 X2 = X0 - Q * X1
260 Y2 = Y0 - Q * Y1
270 A0 = A1:A1 = A2
280 X0 = X1:X1 = X2
290 Y0 = Y1:Y1 = Y2
300 GOTO 220
310 :
320 PRINT "GGT(";A;",";B;")=";A2
330 PRINT : PRINT
340 PRINT "LOESUNG DER GLEICHUNG A*X+B*Y=GGT(A,B)"
350 PRINT
360 :
370 PRINT A;"*";
380 IF X2 < 0 THEN PRINT "(";X2;")";: GOTO 400

```

```

390 PRINT X2;
400 IF B < 0 THEN PRINT B;: GOTO 420
410 PRINT "+";B;
420 PRINT "*";
430 IF Y2 < 0 THEN PRINT "(";Y2;")";: GOTO 450
440 PRINT Y2;
450 PRINT "=";A2
460 IF C / A2 < > INT (C / A2) THEN GOTO 540
470 :
480 PRINT : PRINT : PRINT "ALLG. LOESUNG DER DIOPH. GLEICHG.:"
490 PRINT
500 PRINT "X=";C * X2 / A2; "-T*";B; " ";
510 PRINT "Y=";C * Y2 / A2; "+T*";A;
520 PRINT "      T GANZZAHLIG"
530 END
540 PRINT : PRINT "KEINE LOESEUNG"
550 END

```

# DIOPHANTISCHE GLEICHUNG

$$A * X + B * Y = C$$

EINGABE A,B,C ? 17,6,5

---

$$\text{GGT}(17,6)=1$$

LOESUNG DER GLEICHUNG  $A * X + B * Y = \text{GGT}(A,B)$

$$17 * (-1) + 6 * 3 = 1$$

ALLG. LOESUNG DER DIOPH. GLEICHG.:

$$X = -5 - T * 6 \quad Y = 15 + T * 17 \quad T \text{ GANZZAHLIG}$$

375. 1875.  
 fl. 393 | 75 hauptgüt vñ gewin des erste jars.  
 196875  
 413 | 4375 Andern  
 20671875  
 434 | 109375 Dritten  
 2170546875  
 455 | 81484375 Vierdten  
 227907421875  
 478 | 6055859375 Fünfften  
 23930279296875  
 502 | 535865234375 Sechsten  
 2512679326171875  
 527 | 66265849609375 Sibenden  
 263831329248046875  
 554 | 0457914208084375 Achteten  
 27702289571044921875  
 581 | 748080991943359375 Neundec  
 2908740409059716796875  
 fl. 610 | 83548504154052734375 Zehetē  
 fl. 6 | 68788033232421875000  
 d. 20 | 61640996972656250000.  
 72 Die 120 fl. tragē 2 jar p hauptgüt zins vñ  
 zinszins 132 fl. 2ß 12 d. bringt zins vñ zinszins  
 12 fl. 2ß 12 d. Darnach die 250 fl. tragē 3 jar  
 hauptg. zins vñ zinszins 289 fl. 3ß 7 d. Vñ  
 ist halber zins des vierdec jars 7 fl. 1ß 26. d. 1.  
 b ij

"Aus dem Exempel-Büchlin von Christoph Rudolff, Augsburg  
 1530. In diesem Buch wurden erstmals Dezimalbrüche  
 systematisch genutzt"

## 10. KETTENBRUCH / BRUCHAPPROXIMATION

Sucht man zu einem vorgegebenen Dezimalbruch einen Quotienten gleichen Werts – z.B. ein Windungszahlverhältnis beim Transformator – so kann dieser mit Hilfe eines Kettenbruchs bestimmt werden.

Ein Kettenbruch hat folgende Form

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\dots}}}}}$$

Solche Kettenbrüche können für rationale, d.h. für Bruchzahlen durch den Euklidischen Algorithmus berechnet werden.

Für  $67/29$  ergibt sich z.B.

$$67 : 29 = 2 \text{ Rest } 9$$

$$29 : 9 = 3 \text{ Rest } 2$$

$$9 : 2 = 4 \text{ Rest } 1$$

$$2 : 1 = 2$$

Somit folgt

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{9}{29} = 2 + \frac{1}{\frac{29}{9}}$$

$$\frac{29}{9} = 3 + \frac{2}{9} = 3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}$$

$$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

Setzt man diese Gleichungen rückwärts ineinander, so ergibt sich der Kettenbruch

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}$$

Der Euklidische Algorithmus zeigt, daß der Kettenbruch einer rationalen Zahl abbricht, jedoch nicht der einer irrationalen Zahl. Ein Beweis dazu findet sich in [14]. Kettenbrüche können somit durch folgendes Programm berechnet werden

```
100 INPUT "DEZIMALBRUCH"; X
110 PRINT INT (X)
120 IF X=INT(X) THEN 150
130 X=1/(X-INT(X))
140 GOTO 110
150 END
```

jedoch muß dabei noch die beschränkte Genauigkeit des Rechners beachtet werden.

### Zum folgenden Programm

Das folgende Programm berechnet zu einem eingegebenen Dezimalbruch maximal 8 Teilnenner nach dem oben angegebenen Programmstück. Dabei wird versucht Rechnerungenauigkeiten, so weit wie möglich, abzufangen.

Der so berechnete Kettenbruch wird auf dem Drucker ausgegeben und die zugehörige rationale Zahl berechnet.

Als Programmbeispiel wurde

$$\pi = 3.14159265$$

eingegeben. Man erhält die Bruchapproximation

$$\frac{251690445}{80115557}$$

Der ausgegebene Kettenbruch kann dem Programmausdruck entnommen werden.

```

10 REM KETTENBRUCH/BRUCHAPPROXIMATION
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " KETTENBRUCH/BRUCHAPPROXIMATION "
60 PRINT " "
70 NORMAL
80 PRINT : PRINT
90 INPUT "DRUCKER EINGESCHALTET ? ";A$
100 IF LEFT$(A$,1) < > "J" THEN 50
110 :
120 PRINT : PRINT
130 INPUT "DEZIMALZAHL ? ";Y
140 DIM R(12)
150 :
160 PR# 1
170 K = 8
180 FOR I = 1 TO K
190 R(I) = INT (Y + 1E - 5)
200 IF ABS (R(I) - Y) < 1E - 5 THEN 240
210 Y = 1 / (Y - R(I))
220 NEXT I
230 GOTO 250
240 K = I
250 PRINT R(1);" + 1"
260 FOR I = 2 TO K - 1
270 PRINT TAB( I * 6 - 7);"-----"
280 PRINT TAB( I * 6 - 6);R(I);" + 1"
290 NEXT I
300 PRINT TAB( K * 6 - 7);"-----"
310 PRINT TAB( K * 6 - 6);R(K)
320 :
330 Z = R(K)
340 N = 1
350 FOR J = K - 1 TO 1 STEP - 1
360 I = Z
370 Z = R(J) * Z + N
380 N = I

```

```
390 NEXT J
400 PRINT " ";Z
410 PRINT "-----";
420 PRINT Z / N
430 PRINT " ";N
440 PRINT : PRINT
450 PR# 0
460 END
```

$$3 + 1$$

-----

$$7 + 1$$

-----

$$15 + 1$$

-----

$$1 + 1$$

-----

$$288 + 1$$

-----

$$2 + 1$$

-----

$$4 + 1$$

-----

$$272$$

251690445

----- = 3.14159265

80115557

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is arranged in several lines and appears to be a list or a set of instructions, but the characters are too light to read accurately.

## 11. PERMUTATIONEN

Da endliche  $n$ -elementige Mengen stets auf die Menge

$$\{1, 2, 3, \dots, n\}$$

abgebildet werden können, arbeiten die folgenden Kombinatorik-Programme stets mit dieser Anfangsmenge der natürlichen Zahlen.

Jede Anordnung der Menge  $1, 2, 3, \dots, n$ , bei der jedes Element genau einmal vorkommt, heißt Permutation.

Permutationen treten vielfach in der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf. Man benötigt sie insbesondere auch in Operations Research, wenn man z.B. auf der Suche nach der kürzesten Rundreise alle Anordnungen der zu besuchenden Städte durchmustern muß.

Es gibt

$$n!$$

Permutationen einer  $n$ -elementigen Menge; dabei ist  $n!$  die in Programm 6 behandelte Fakultätsfunktion.

Die Fakultäten der Zahlen wachsen sehr schnell, so gilt

$$6! = 720, \quad 7! = 5040, \quad 8! = 40320$$

$$9! = 362880, \quad 10! = 3628800$$

$$11! = 39916800$$

Somit gibt es für 10 Leute bei 10 Sitzplätzen

$$3628800$$

verschiedene Sitzordnungen. Spielt in einer Fußballmannschaft jeder auf jeder Position, so gibt es

$$39916800$$

verschiedene Mannschaftsaufstellungen.

### Zu folgendem Programm

Das folgende Programm erzeugt nach einem Algorithmus von Ord-Smith die Permutation einer  $n$ -elementigen Menge in lexikographischer Anordnung.

Dabei heißen zwei Zahlenfolgen  $a_j$  und  $b_j$  lexikographisch geordnet, wenn für die erste Stelle mit

$$a_j \neq b_j$$

gilt

$$a_j \leq b_j$$

Der Programmausdruck zeigt die Permutation einer 4-elementigen Menge.

```

10 REM PERMUTATIONEN
20 HOME : INVERSE
30 PRINT " "
40 PRINT " PERMUTATIONEN "
50 PRINT " "
60 NORMAL : PRINT : PRINT
70 :
80 INPUT "WIEVIELE ELEMENTE ? ";N
90 DIM X(N),Y(N)
100 PRINT
110 INPUT "DRUCKERAUSGABE ? ";PR$
120 PRINT
130 :
140 IF PR$ = "J" THEN PR# 1
150 REM STARTWERTE
160 FOR I = 1 TO N
170 X(I) = I
180 NEXT I
190 F = 0:P = 0
200 :
210 FOR I = 1 TO N
220 PRINT X(I);
230 NEXT I: PRINT
240 P = P + 1
250 GOSUB 330
260 IF F = 1 GOTO 210
270 :
280 PRINT : PRINT
290 PRINT P;" PERMUTATIONEN"
300 PR# 0
310 END
320 :
330 REM UNTERPROGRAMM
340 N1 = N - 1
350 IF F = 1 THEN 400
360 F = 1
370 FOR K = 1 TO N1
380 Y(K) = N

```

```

390 NEXT K
400 IF Y(N1) < > N THEN 450
410 Y(N1) = N1:L = X(N)
420 X(N) = X(N1):X(N1) = L
430 GOTO 650
440 :
450 FOR J = 1 TO N1
460 K = N - J
470 IF Y(K) < > K THEN 540
480 Y(K) = N
490 NEXT J
500 F = 0
510 K = 1
520 GOTO 580
530 :
540 M = Y(K):L = X(M)
550 X(M) = X(K):X(K) = L
560 Y(K) = M - 1
570 K = K + 1
580 M = N
590 :
600 L = X(M):X(M) = X(K)
610 X(K) = L
620 M = M - 1
630 K = K + 1
640 IF K < M THEN 600
650 RETURN

```

## PERMUTATIONEN

WIEVIELE ELEMENTE ? 4

DRUCKERAUSGABE ? J

1234

1243

1324

1342

1423

1432

2134

2143

2314

2341

2413

2431

3124

3142

3214

3241

3412

3421

4123

4132

4213

4231

4312

4321

24 PERMUTATIONEN

## 12. ZUFALLSPERMUTATION

Für viele Zwecke benötigt man zufällige Permutationen, z.B. für die bei Programm 8 erwähnten Monte-Carlo-Simulation der vertauschten Briefe.

Als Anfangswert wird die Permutation  $P(I)$  der Zahlen  $1, \dots, n$  auf die natürliche Reihenfolge gesetzt.

Sodann werden  $n-1$  ganzzahlige Zufallszahlen ausgelost und die Permutation mit entsprechendem Index ausgetauscht. Dies wird durch folgendes Programmstück durchgeführt.

```
260 FOR J=N TO 2 STEP -1
270 R = INT (J * RND(1)) + 1
280 H = P(J) : P(J) = P(R) : P(R) = H
290 NEXT J
```

Die so erhaltene Zufallspermutation wird ausgedruckt und bei Bedarf eine neue erzeugt.

### Zum folgenden Programm

Nach Abfrage, wieviele Zahlen die Permutation umfassen soll und wieviele Permutationen erwünscht sind, werden nach dem angegebenen Verfahren mit Hilfe des eingebauten Zufallszahlengenerators die benötigten zufälligen Permutationen erzeugt.

Der Programmausdruck zeigt 20 Zufallspermutationen der Zahlen 1 bis 9.

```

100 REM ZUFALLSPERMUTATIONEN
101 HOME : INVERSE
102 PRINT " "
110 PRINT " ZUFALLSPERMUTATIONEN "
112 PRINT " "
113 NORMAL : PRINT : PRINT
120 :
130 INPUT "WIEVIELE ZAHLEN ? ";N
140 DIM P(N)
150 PRINT : INPUT "WIEVIELE ZUFALLSPERMUTATIONEN ? ";M
160 PRINT
170 :
180 I = 1: REM ZAEHLER
190 :
200 REM ANFANGSWERTE
210 FOR J = 1 TO N
220 P(J) = J
230 NEXT J
240 :
250 REM AUSLOSEN DER REIHENFOLGE
260 FOR J = N TO 2 STEP - 1
270 R = INT (J * RND (1)) + 1
280 H = P(J):P(J) = P(R):P(R) = H
290 NEXT J
300 :
310 REM AUSGABE
320 FOR J = 1 TO N
330 PRINT P(J);
340 NEXT J: PRINT
350 :
360 I = I + 1
370 IF I < = M THEN 210
380 END

```

## ZUFALLSPERMUTATIONEN

WIEVIELE ZAHLEN ? 9

WIEVIELE ZUFALLSPERMUTATIONEN ? 20

628475139  
813675249  
759421863  
698154372  
458917326  
562389147  
273158694  
486193527  
217385946  
432571869  
163549782  
765921834  
598621437  
145867923  
243876951  
718542936  
718632459  
864925137  
314596278  
237641895

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is arranged in approximately 20 horizontal lines across the page.



## Zum folgenden Programm

Das Programm erzeugt nach einem Algorithmus von Kurtzberg alle k-Kombinationen (oder k-ten Klasse) einer n-elementigen Menge.

Der Programmausdruck zeigt die

4-Kombinationen

einer 6-elementigen Menge.



“Titelblatt der Arithmetik von Petrus Apianus, Ingolstadt 1527 mit der ersten gedruckten Darstellung des Pascalschen Dreiecks”

```

10 REM KOMBINATIONEN
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " KOMBINATIONEN "
60 PRINT " "
70 PRINT : NORMAL
80 INPUT "WIEVIELE ELEMENTE ? ";N
90 PRINT : INPUT "ZU WELCHER KLASSE ? ";M
100 DIM X(M)
110 :
120 REM STARTWERTE
130 L = 1
140 FOR I = 1 TO M
150 X(I) = N
160 NEXT I
170 :
180 REM M AUS N
190 P = 1
200 IF M = 0 THEN 260
210 FOR I = 1 TO M
220 P = P * (N - I + 1) / I
230 NEXT I
240 PRINT
250 :
260 GOSUB 370
270 FOR I = 1 TO M
280 PRINT X(I);
290 NEXT I: PRINT
300 L = L + 1
310 IF L < = P THEN 260
320 :
330 PRINT
340 PRINT P;" KOMBINATIONEN"
350 END
360 :
370 REM UNTERPROGRAMM
380 FOR K = 1 TO M

```

```
390 J = K - 1
400 A = M - J
410 B = N - J
420 IF X(A) < B THEN 500
430 NEXT K
440 :
450 FOR K = 1 TO M
460 X(K) = K
470 NEXT K
480 RETURN
490 :
500 B = X(A)
510 FOR K = A TO M
520 B = B + 1
530 X(K) = B
540 NEXT K
550 RETURN
```

## KOMBINATIONEN

WIEVIELE ELEMENTE ? 6

ZU WELCHER KLASSE ? 4

1234

1235

1236

1245

1246

1256

1345

1346

1356

1456

2345

2346

2356

2456

3456

15 KOMBINATIONEN

ÜLOADKOMBINATION, D2

CONTENTS

1. Introduction

2. The Role of the Teacher

3. The Role of the Student

4. The Role of the Parent

5. The Role of the Community

6. The Role of the Government

7. The Role of the Media

8. The Role of the Church

9. The Role of the Family

10. The Role of the School

11. The Role of the Society

12. The Role of the Culture

13. The Role of the Religion

14. The Role of the Philosophy

15. The Role of the Science

16. The Role of the Art

17. The Role of the Music

18. The Role of the Literature

19. The Role of the History

20. The Role of the Geography

21. The Role of the Economics

22. The Role of the Politics

23. The Role of the Law

24. The Role of the Medicine

25. The Role of the Agriculture

26. The Role of the Industry

27. The Role of the Commerce

28. The Role of the Transportation

29. The Role of the Communication

30. The Role of the Information

31. The Role of the Technology

32. The Role of the Environment

33. The Role of the Energy

34. The Role of the Space

35. The Role of the Ocean

36. The Role of the Atmosphere

37. The Role of the Earth

38. The Role of the Universe

39. The Role of the Cosmos

40. The Role of the Galaxy

41. The Role of the Planet

42. The Role of the Moon

43. The Role of the Sun

44. The Role of the Stars

45. The Role of the Planets

46. The Role of the Galaxies

47. The Role of the Universe

48. The Role of the Cosmos

49. The Role of the Galaxy

50. The Role of the Planet

1. Introduction

2. The Role of the Teacher

3. The Role of the Student

4. The Role of the Parent

5. The Role of the Community

6. The Role of the Government

7. The Role of the Media

8. The Role of the Church

9. The Role of the Family

10. The Role of the School

11. The Role of the Society

12. The Role of the Culture

13. The Role of the Religion

14. The Role of the Philosophy

15. The Role of the Science

16. The Role of the Art

17. The Role of the Music

18. The Role of the Literature

19. The Role of the History

20. The Role of the Geography

21. The Role of the Economics

22. The Role of the Politics

23. The Role of the Law

24. The Role of the Medicine

25. The Role of the Agriculture

26. The Role of the Industry

27. The Role of the Commerce

28. The Role of the Transportation

29. The Role of the Communication

30. The Role of the Information

31. The Role of the Technology

32. The Role of the Environment

33. The Role of the Energy

34. The Role of the Space

35. The Role of the Ocean

36. The Role of the Atmosphere

37. The Role of the Earth

38. The Role of the Universe

39. The Role of the Cosmos

40. The Role of the Galaxy

41. The Role of the Planet

42. The Role of the Moon

43. The Role of the Sun

44. The Role of the Stars

45. The Role of the Planets

46. The Role of the Galaxies

47. The Role of the Universe

48. The Role of the Cosmos

49. The Role of the Galaxy

50. The Role of the Planet

1. Introduction

2. The Role of the Teacher

3. The Role of the Student

4. The Role of the Parent

5. The Role of the Community

6. The Role of the Government

7. The Role of the Media

8. The Role of the Church

9. The Role of the Family

10. The Role of the School

11. The Role of the Society

12. The Role of the Culture

13. The Role of the Religion

14. The Role of the Philosophy

15. The Role of the Science

16. The Role of the Art

17. The Role of the Music

18. The Role of the Literature

19. The Role of the History

20. The Role of the Geography

21. The Role of the Economics

22. The Role of the Politics

23. The Role of the Law

24. The Role of the Medicine

25. The Role of the Agriculture

26. The Role of the Industry

27. The Role of the Commerce

28. The Role of the Transportation

29. The Role of the Communication

30. The Role of the Information

31. The Role of the Technology

32. The Role of the Environment

33. The Role of the Energy

34. The Role of the Space

35. The Role of the Ocean

36. The Role of the Atmosphere

37. The Role of the Earth

38. The Role of the Universe

39. The Role of the Cosmos

40. The Role of the Galaxy

41. The Role of the Planet

42. The Role of the Moon

43. The Role of the Sun

44. The Role of the Stars

45. The Role of the Planets

46. The Role of the Galaxies

47. The Role of the Universe

48. The Role of the Cosmos

49. The Role of the Galaxy

50. The Role of the Planet

CONTENTS

CONTENTS

## 14. VARIATIONEN

Ordnet man  $k$  Elemente einer  $n$ -elementigen Menge unter Berücksichtigung der Reihenfolge an, so erhält man eine  $k$ -Variation oder Variation zu  $k$ -ten Klasse.

Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

$k$ -Variationen einer  $n$ -elementigen Menge.

Wollen von 20 Personen 8 Leute an einem bestimmten Tisch sitzen, so gibt es dort

$$\frac{20!}{12!} = 5079110400$$

verschiedene Sitzordnungen. Aus einem Gremium von 30 Personen gibt es

$$\frac{30!}{27!} = 24360$$

verschiedene Möglichkeiten einen Präsidenten, dessen 1. und 2. Stellvertreter auszuwählen.

### Zum folgenden Programm

Das Programm erzeugt alle  $k$ -Variationen oder Variationen zur  $k$ -ten Klasse einer  $n$ -elementigen Menge.

Der Programmausdruck zeigt alle 3 Variationen einer 4-elementigen Menge.

```

10 REM VARIATIONEN
20 HOME : INVERSE
30 PRINT " "
40 PRINT " VARIATIONEN "
50 PRINT " "
60 NORMAL : PRINT
70 :
80 INPUT "ZAHL DER ELEMENTE ? ";N
90 PRINT : INPUT "ZU WELCHER KLASSE ? ";K
100 PRINT
110 :
120 REM STARTWERTE
130 FOR I = 1 TO N
140 X(I) = I
150 NEXT I
160 M = K
170 IF K = N THEN M = M - 1
180 FOR I = 1 TO M
190 Y(I) = I
200 NEXT I
210 V = 0
220 :
230 I = M
240 FOR J = 1 TO K
250 PRINT X(J);
260 NEXT J: PRINT
270 V = V + 1
280 :
290 IF Y(I) > = N THEN 340
300 Y(I) = Y(I) + 1:H = X(I)
310 X(I) = X(Y(I)):X(Y(I)) = H
320 GOTO 230
330 :
340 H = X(I):X(I) = X(Y(I))
350 X(Y(I)) = H:Y(I) = Y(I) - 1
360 IF Y(I) > I THEN 340
370 :
380 I = I - 1

```

```
390 IF I > 0 THEN 290
400 :
410 PRINT
420 PRINT V;" VARIATIONEN"
430 END
```

VARIATIONEN

ZAHL DER ELEMENTE ? 4

ZU WELCHER KLASSE ? 3

123

124

132

134

142

143

213

214

231

234

241

243

312

314

321

324

341

342

412

413

421

423

431

432

24 VARIATIONEN

## 15. 01-TUPEL

Wählt man  $k$  Elemente aus einer  $n$ -elementigen Menge aus und läßt dabei beliebige Wiederholung zu, so erhält man die

$k$ -tupel

der Menge. Im Fall von  $k=2$  spricht man auch von Paaren, bei  $k=3$  von Tripel.

Es gibt insgesamt

$$n^k$$

$k$ -Tupel einer  $n$ -elementigen Menge.

Besondere Bedeutung haben die 8-Tupel der Binärzahlen 0 und 1, Byte genannt, für Computer. Alle ganzen Zahlen werden mit Hilfe zweier Bytes dargestellt. Da das erste Byte das Vorzeichen angibt, können somit INTEGER-Zahlen mit 15 Bit dargestellt werden. Es sind dies die Zahl 0 bis 32767.

Weitere Anwendungen finden die 01-Tupel, da mit ihrer Hilfe alle Teilmengen einer gegebenen Menge erzeugt werden können: Ist die  $i$ -te Stelle des 01-Tupel Eins, so gehört das Element  $i$  zur entsprechenden Teilmenge, sonst nicht.

Somit hat eine  $n$ -elementige Menge sovieler Teilmengen, wie der 01-Tupel der Länge  $n$  gibt, nämlich

$$2^n$$

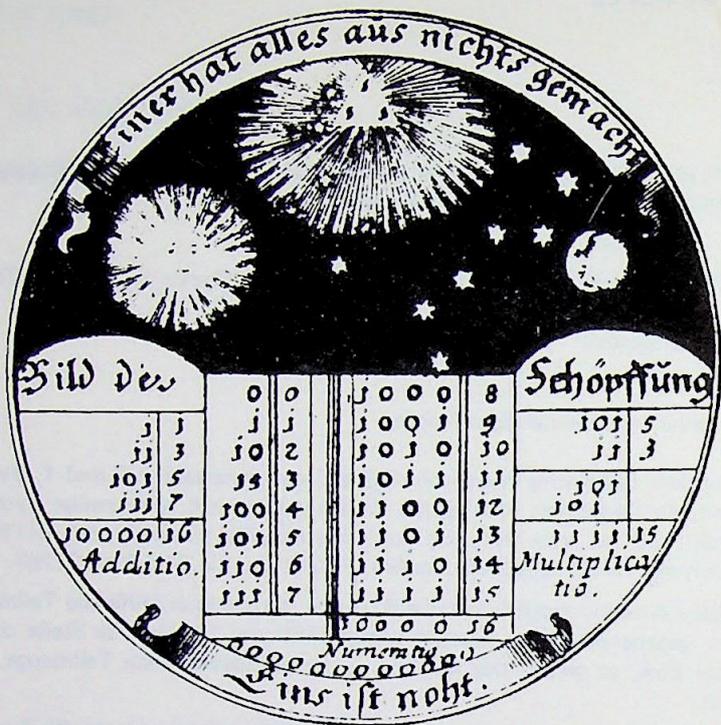
Wichtig sind 01-Tupel auch in der Boole'schen Algebra und Aussagenlogik, da mit ihrer Hilfe alle Wahrheitswerte von Aussageverknüpfungen ermittelt werden können (siehe Logikprogramme im Band 1 der vorliegenden Programmsammlung). Allerdings wird im CBM-BASIC "wahr" nicht als 1, sondern als  $-1$  codiert; dies kann aber im Programm durch eine Vorzeichenänderung erreicht werden.

### Zum folgenden Programm

Das Programm erzeugt nach einem Algorithmus von Berztiss alle 01-Tupel der gewünschten Länge.

Läßt man in Zeile 250 statt  $X(K)$  das Element  $A(K)$  einer Menge — falls  $X(K) = 1$  — ausdrucken, so erhält man alle Teilmengen dieser Menge.

Der Programmausdruck zeigt alle 01-Tupel der Länge 5.



"Entwurf von Leibniz für eine Gedenkmünze, die das von ihm gefundene Binärsystem darstellt (1697)"

```

10 REM Ø1-N-TUPEL
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " Ø1-N-TUPEL "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT
80 INPUT "LAENGE DER Ø1-TUPEL ? ";N
90 DIM X(N)
100 PRINT
110 :
120 REM STARTWERTE
130 J = 2 ^ N
140 L = 1
150 FOR K = 1 TO N
160 X(K) = Ø
170 NEXT K
180 :
190 FOR K = 1 TO N
200 PRINT X(K);
210 NEXT K: PRINT
220 L = L + 1
230 IF L > J THEN 270
240 GOSUB 310
250 GOTO 190
260 :
270 PRINT
280 PRINT J; " ";N; "-TUPEL "
290 END
300 :
310 REM UNTERPROGRAMM
320 I = 1
330 IF X(I) < > Ø THEN 360
340 X(I) = 1
350 GOTO 390
360 X(I) = Ø
370 I = I + 1
380 IF I < = N THEN 330
390 RETURN

```

Ø1-N-TUPEL

LAENGE DER Ø1-TUPEL ? 5

00000  
10000  
01000  
11000  
00100  
10100  
01100  
11100  
00010  
10010  
01010  
11010  
00110  
10110  
01110  
11110  
00001  
10001  
01001  
11001  
00101  
10101  
01101  
11101  
00011  
10011  
01011  
11011  
00111  
10111  
01111  
11111

32 5-TUPEL

## 16. PARTITIONEN

Unter einer Partition der Zahl  $n$  versteht man die Zerlegung von  $n$  in Summanden, wobei es auf die Anordnung nicht ankommt. So hat die Zahl 6 folgende 11 Partitionen:

$$\begin{aligned}6 &= 6 \\ &= 5 + 1 \\ &= 4 + 2 \\ &= 4 + 1 + 1 \\ &= 3 + 3 \\ &= 3 + 2 + 1 \\ &= 3 + 1 + 1 + 1 \\ &= 2 + 2 + 2 \\ &= 2 + 2 + 1 + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1\end{aligned}$$

Solche Partitionen werden benötigt bei Geldwechsel- und Frankatur-Problemen.

### Zum folgenden Programm

Das Programm erzeugt sämtliche Partitionen einer Zahl nach einem Algorithmus von McKay.

Der Programmausdruck zeigt die 42 Partitionen der Zahl 10.

```

10 REM PARTITIONEN
20 HOME : INVERSE
30 PRINT " "
40 PRINT " PARTITIONEN "
50 PRINT " "
60 NORMAL : PRINT
70 :
80 INPUT "WELCHE ZAHL ? ";N
90 DIM P(N)
100 :
110 REM ANFANGSWERTE
120 P(1) = N
130 K = 1:F = 0:Z = 0
140 PRINT
150 PRINT "PARTITIONEN VON ";N
160 PRINT
170 :
180 REM UNTERPROGRAMMAUFRUF
190 GOSUB 290
200 Z = Z + 1
210 FOR J = 1 TO K
220 PRINT P(J);
230 NEXT J: PRINT
240 IF F = 1 THEN 190
250 PRINT
260 PRINT Z;" PARTITIONEN"
270 END
280 :
290 REM UNTERPROGRAMM
300 IF F = 1 THEN 390
310 F = 1
320 FOR I = 1 TO K
330 IF P(I) = 1 THEN 510
340 NEXT I
350 :
360 I = K
370 GOTO 510
380 :
390 L = K - I
400 K = I
410 P(I) = P(I) - 1
420 IF P(K) > L THEN 480

```

```
430 L = L - P(K)
440 K = K + 1
450 P(K) = P(K - 1)
460 GOTO 420
470 :
480 K = K + 1
490 P(K) = L + 1
500 IF P(I) < > 1 THEN I = K
510 IF P(I) = 1 THEN I = I - 1
520 IF I = 0 THEN F = 0
530 RETURN
```

## PARTITIONEN

WELCHE ZAHL ? 10

PARTITIONEN VON 10

10  
91  
82  
811  
73  
721  
7111  
64  
631  
622  
6211  
61111  
55  
541  
532  
5311  
5221  
52111  
511111  
442  
4411  
433  
4321  
43111  
4222  
42211  
421111  
4111111  
3331  
3322  
33211  
331111  
32221  
322111

3211111  
31111111  
22222  
222211  
2221111  
22111111  
211111111  
1111111111

42 PARTITIONEN

HIERONYMI CARDANI

relinquitur prima  $6m:30\frac{6}{7}$ , hæc autem quantitates proportionales sunt, & quadratum secundæ est æquale duplo producti secundæ in primam, cum quadruplo primæ, ut proponebatur.

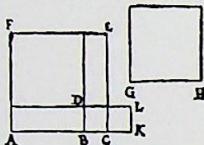
De cubo & rebus æqualibus numero. Cap. XI.



Cipio Ferreus Bononiensis iam annis ab hinc triginta ferme capitulum hoc inuenit, tradidit uero Anthonio Martia Florido Veneto, qui cū in certamen cū Nicolao Tartalea Brixellenſe aliquando ueniſſet, occaſionem dedit, ut Nicolaus inuenerit & ipſe, qui cum nobis rogantibus tradidiſſet, ſuppreſſa demonſtratione, freti hoc auxilio, demonſtrationem quaſiuisimus, tamq̃ in modos, quod difficillimum fuit, redactam ſic ſubiiciamus.

DEMONSTRATIO.

Sit igitur exempli cauſa cubus  $GH$  & ſexcuplum lateris  $GH$  æquale  $20$ , & ponam duos cubos  $A$  &  $C$ , quorum differentia ſit  $20$ , ita quod productum  $A$   $C$  lateris, in  $C$   $K$  lateris, ſit  $2$ , tertia ſcilicet numeri rerum pars, & abſcindam  $C$   $B$ , æqualem  $C$   $K$ , dico, quod ſi ita fuerit, lineam  $AB$  reſiduum, eſſe æqualem  $GH$ , & ideo rei aſſumationem, nam de  $GH$  iam ſupponebatur, quod ita eſſet, perſiciam igitur per modum primi ſuppoſiti.  $6^o$  capituli huius libri, corpora  $D$   $A$ ,  $D$   $C$ ,  $D$   $E$ ,  $D$   $F$ , ut per  $D$   $C$  inelligamus cubum  $B$   $C$ , per  $D$   $F$  cubum  $A$   $B$ , per  $D$   $A$  triplum  $C$   $B$  in quadratum  $A$   $B$ , per  $D$   $E$  triplum  $A$   $B$  in quadratū  $B$   $C$ . quia igitur ex  $A$   $C$  in  $C$   $K$  ſit  $2$ , ex  $A$   $C$  in  $C$   $K$  ter ſiet  $6$  numerus rerum, igitur ex  $A$   $B$  in triplum  $A$   $C$  in  $C$   $K$  ſunt  $6$  res  $A$   $B$ , ſeu ſexcuplum  $A$   $B$ , quare triplum producti ex  $A$   $B$ ,  $B$   $C$ ,  $A$   $C$ , eſt ſexcuplum  $A$   $B$ , at uero differentia cubi  $A$   $C$ , à cubo  $C$   $K$ , & exiſtenti à cubo  $B$   $C$  ei æq̃le ex ſuppoſito, eſt  $20$ , & ex ſuppoſito primo  $6^o$  capituli, eſt aggregatum corporum  $D$   $A$ ,  $D$   $E$ ,  $D$   $F$ , tria igitur hæc corpora ſunt  $20$ , poſita uero  $B$   $C$   $m$ : cubus  $A$   $B$ , æqualis eſt cubo  $A$   $C$ , & triplum  $A$   $C$  in quadratum  $B$   $C$ , & cubo  $B$   $C$   $m$ : & triplum  $B$   $C$  in quadratum  $A$   $C$   $m$ : per demonſtrata illic, differentia autem tripli  $B$   $C$  in quadratum  $A$   $C$ , à triplum  $A$   $C$  in quadratum  $B$   $C$  eſt productum  $A$   $B$ ,  $B$   $C$ ,  $A$   $C$ , quare cum hoc, ut demonſtratum eſt, æquale ſit ſexcuplo  $A$   $B$ , igitur addito ſexcuplo  $A$   $B$ , ad id quod ſit ex  $A$   $C$  in quadratum  $B$   $C$  ter, ſiet triplum  $B$   $C$  in quadratum  $A$   $C$ , cum igitur  $B$   $C$  ſit  $m$ : iam oſtenſum eſt, quod productum  $C$   $B$



"Erste Seite aus der Ars Magna von Geronimo Cardano, Nürnberg 1545"

## 17. KUBISCHE GLEICHUNG

Die kubische Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

kann mit Hilfe der Cardano-Formel gelöst werden. Die Cardano-Formel ist für das Rechnen von Hand äußerst umständlich, so daß man meist zu einem Iterationsverfahren greift (vgl. Programm 31). Sie liefert jedoch im Gegensatz zu den Iterationsverfahren sämtliche Lösungen der Gleichung.

Dividiert man die kubische Gleichung durch  $a$  und führt die Substitution

$$y = x + \frac{b}{3a}$$

durch, so erhält man die sogenannte reduzierte Gleichung

$$y^3 + 3py + 2q = 0$$

mit

$$2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \quad 3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$$

Aus  $p$  und  $q$  berechnet sich die kubische Resultante

$$D = q^2 + p^3$$

Ihr Vorzeichen gibt Auskunft über die Art der Lösungen:

Ist  $D > 0$ , so gibt es 1 reelle, 2 konjugiert komplexe Lösungen

Ist  $D < 0$ , so gibt es 3 reelle Lösungen

Ist  $D = 0$ , so gibt es mehrfache, reelle Wurzeln

Mit Hilfe der 3. Wurzel

$$\sqrt[3]{-q \pm \sqrt{D}}$$

können nun die gesuchten Lösungen berechnet werden. Im Fall  $D < 0$  allerdings, ist in der Cardano-Formel eine komplexe Wurzel zu ziehen. Deswegen wird hier eine trigonometrische Lösung durchgeführt. Die hierbei benötigte Umkehrfunktion  $\arccos(x)$  der Cosinus-Funktion ist nicht in BASIC implementiert. Sie muß daher über die Arctangens-Funktion ausgedrückt werden.

Es gilt

$$\arccos x = \begin{cases} \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \pi & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

### Zum folgenden Programm

Das Programm berechnet die Lösung der kubischen Gleichung nach dem angegebenen Verfahren von Cardano.

Eine berühmte kubische Gleichung ist

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$$

Sie wurde Leonardo von Pisa (ca. 1170 – 1250), genannt Fibonacci, von Johann von Palermo, einem Höfling von Friedrich II, zur Lösung gestellt. Fibonacci fand die Lösung

$$x = 1.3688081075$$

die auf 8(!) Dezimalen genau ist.

Die Eingabe der Koeffizienten ins Programm liefert, neben der genannten Lösung, noch die beiden komplexen Lösungen

$$-1.68440405 \pm 3.43133135i$$

```

10 REM KUBISCHE GLEICHUNG
20 :
30 PI = 3.141592654
40 :
50 HOME : INVERSE
60 PRINT " "
70 PRINT " KUBISCHE GLEICHUNG "
80 PRINT " "
90 PRINT " AX^3+BX^2+CX+D=0 "
100 PRINT " "
110 NORMAL : PRINT
120 PRINT "EINGABE DER KOEFFIZIENTEN"
130 PRINT
140 INPUT "A, B, C, D ? ";A,B,C,D
150 PRINT
160 IF A = 0 THEN PRINT "KEINE KUBISCHE GLEICHUNG": END
170 A1 = A:A = B / A1:B = C / A1:C = D / A1
180 :
190 REM PARAMETER DER REDUZ.GLEICHUNG
200 P = - A * A / 9 + B / 3
210 Q = A * A * A / 27 - A * B / 6 + C / 2
220 :
230 REM KUBISCHE RESULTANTE
240 R = Q * Q + P * P * P
250 :
260 REM FALLUNTERSCHIEDUNG
270 ON SGN (R) + 2 GOTO 490,410,290
280 :
290 REM 1 REELLE,2 KOMPLEXE LOESUNGEN
300 U = SQR (R) - Q:U = SGN (U) * ABS (U) ^ (1 / 3)
310 V = - SQR (R) - Q:V = SGN (V) * ABS (V) ^ (1 / 3)
320 X1 = U + V - A / 3
330 REM REAL- UND IMAGINAERTEIL
340 X2 = - (U + V) / 2 - A / 3:X3 = (U - V) / 2 * SQR (3)
350 PRINT "X1=";X1
360 PRINT
370 PRINT "X2=";X2;" +I*";X3
380 PRINT
390 PRINT "X3=";X2;" -I*";X3: END
400 :
410 REM REELLE DOPPELLOESUNG
420 U = ( - Q) ^ (1 / 3)

```

```

430 X1 = 2 * U - A / 3
440 X2 = - U - A / 3
450 PRINT "X1=";X1
460 PRINT
470 PRINT "X2=X3=";X2: END
480 :
490 REM 3 REELLE LOESUNGEN
500 X = - Q / SQR ( - P ^ 3)
510 REM DEFINITION DES ARCCOS
520 DEF FN AC(X) = ATN ( SQR ( 1 - X * X) / X)
530 IF X > 0 THEN PHI = FN AC(X): GOTO 560
540 IF X < 0 THEN PHI = FN AC(X) + PI: GOTO 560
550 PHI = PI / 2
560 X1 = 2 * SQR ( - P) * COS (PHI / 3) - A / 3
570 X2 = - 2 * SQR ( - P) * COS ((PHI + PI) / 3) - A / 3
580 X3 = - 2 * SQR ( - P) * COS ((PHI - PI) / 3) - A / 3
590 PRINT "X1=";X1
600 PRINT
610 PRINT "X2=";X2
620 PRINT
630 PRINT "X3=";X3
640 PRINT
650 END

```

## KUBISCHE GLEICHUNG

$$AX^3+BX^2+CX+D=0$$

EINGABE DER KOEFFIZIENTEN

A, B, C, D ? 1,2,10,-20

$$X1=1.36880811$$

$$X2=-1.68440405+I*3.43133135$$

$$X3=-1.68440405-I*3.43133135$$



## 18. GLEICHUNG VIERTEN GRADES

Ebenso wie die kubische Gleichung kann auch die Gleichung 4. Grades

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

mit Hilfe von Wurzeltermen gelöst werden. Nach Ferrari kann die Lösung der Gleichung 4. Grades auf die kubische Gleichung

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)y + e(4c - b^2) - d^2 = 0$$

zurückgeführt werden. Setzt man eine Lösung  $y$  in die quadratische Gleichung

$$x + \frac{1}{2}(b+Ax) + \left(y + \frac{by-d}{A}\right) = 0$$

mit

$$A = \pm \sqrt{8y + b^2 - 4c}$$

ein, so liefert deren Lösung schließlich die gesuchten Lösungen der ursprünglichen Gleichung 4. Grades.

Es ist klar, daß die Lösung nach Ferrari für das Rechnen von Hand zu kompliziert ist. Daher werden Gleichungen 4. Grades meist mit Iterationsverfahren angegangen. Da jedoch Gleichungen 4. Grades nicht notwendig reelle Lösungen haben, kann es hier zu Konvergenzschwierigkeiten kommen. Da aber die Gleichungen vom 3. und 4. Grad häufig vorkommen – insbesondere im Zusammenhang mit dem charakteristischen Polynom einer Matrix – ist das vorliegende Programm sehr nützlich.

Nachdem Ferrari 1545 seine Formel veröffentlicht hatte, bemühten sich die Mathematiker – insbesondere Euler und Lagrange – über 250 Jahre lang eine entsprechende Formel für die Gleichung 5. Grades zu finden. Erst 1824 zeigte Abel, daß Gleichungen von höherem als dem 4. Grad prinzipiell nicht mit Radikalen, d.h. mit Wurzeltermen zu lösen sind. Hier muß man stets zu Iterationsverfahren greifen.

### Zum folgenden Programm

Das Programm löst die allgemeine Gleichung 4. Grades nach dem Verfahren von Ferrari. Die dabei auftretende kubische Gleichung wird nach der Cardano-Formel von Programm 17 gelöst.

Als Beispiel wird die Gleichung

$$x^4 - 24x^3 + 150x^2 - 200x - 375 = 0$$

behandelt; sie ergibt sich in Programm 36 als charakteristisches Polynom der dort angegebenen Matrix.

Das Programm liefert die reellen Lösungen

$$-1, +5, 0, 15$$

```

10 REM "GLEICHUNG VIERTEN GRADES"
20 :
30 PI = 3.141592654
40 HOME : INVERSE
50 PRINT " "
60 PRINT "      GLEICHUNG VIERTEN GRADES  "
70 PRINT " "
80 PRINT " A*X^4 + B*X^3 + C*X^2 + D*X + E  "
90 PRINT " "
100 NORMAL : PRINT
110 INPUT "A, B, C, D, E ? ";A,B,C,D,E
120 PRINT
130 PRINT "LOESUNGEN:": PRINT
140 IF A = 0 THEN PRINT "KEINE GLEICHUNG 4. GRADES": END
150 IF B = 0 AND D = 0 THEN 820
160 :
170 REM KUBISCHE GLEICHUNG
180 GOSUB 330
190 :
200 REM QUADRATISCHE GLEICHUNG
210 J = B * Y + B * B - 4 * C
220 IF ABS (J) < 5E - 8 THEN J = 0
230 H1 = SQR (J):G = H1
240 H = (B * H1 + J) / 2
250 I = Y * H1 + B * Y - D
260 GOSUB 630
270 :
280 H1 = - H1:H = (B * H1 + J) / 2:G = H1
290 I = Y * H1 + B * Y - D
300 GOSUB 630
310 END
320 :
330 REM KUBISCHE GLEICHUNG
340 A1 = - C / 2:B1 = B * D / 4 - E:C1 = (E * (4 * C - B * B) - D * D) /
      B
350 P = - A1 * A1 / 9 + B1 / 3
360 Q = A1 ^ 3 / 27 - A1 * B1 / 6 + C1 / 2
370 REM KUBISCHE RESULTANTE
380 R = Q * Q + P ^ 3
390 :
400 ON SGN (R) + 2 GOTO 530,480,420
410 :

```

```

420 REM 1 REELLE, 2 KOMPLEXE LOESUNGEN
430 U = SQR (R) - Q:U = SGN (U) * ABS (U) ^ (1 / 3)
440 V = - SQR (R) - Q:V = SGN (V) * ABS (V) ^ (1 / 3)
450 Y = U + V - A1 / 3
460 RETURN
470 :
480 REM REELLE DOPPELLOESUNG
490 U = ( - Q) ^ (1 / 3)
500 Y = 2 * U - A1 / 3
510 RETURN
520 :
530 REM 3 REELLE LOESUNGEN
540 X = - Q / SQR ( - P ^ 3)
550 REM DEFINITION DES ARCCOS
560 DEF FN AC(X) = ATN ( SQR (1 - X * X) / X)
570 IF X > 0 THEN PHI = FN AC(X): GOTO 600
580 IF X < 0 THEN PHI = FN AC(X) + PI: GOTO 600
590 PHI = PI / 2
600 Y = 2 * SQR ( - P) * COS (PHI / 3) - A1 / 3
610 RETURN
620 :
630 REM QUADRATISCHE GLEICHUNG
640 DI = H * H - 4 * G * I
650 IF DI < 0 THEN 740
660 :
670 REM REELLE LOESUNG
680 X1 = ( - H + SQR (DI)) / (2 * G)
690 X2 = ( - H - SQR (DI)) / (2 * G)
700 PRINT X1: PRINT : PRINT X2
710 PRINT
720 RETURN
730 :
740 REM KOMPLEXE LOESUNG
750 DI = - DI
760 PRINT - H / (2 * G); " + I*"; SQR (DI) / (2 * G)
770 PRINT
780 PRINT - H / (2 * G); " + I*"; - SQR (DI) / (2 * G)
790 PRINT
800 RETURN
810 :
820 REM BIQUADRATISCHE GLEICHUNG
830 K = C * C - 4 * A * E
840 IF K < 0 THEN 1000
850 Y1 = ( - C + SQR (C * C - 4 * A * E)) / (2 * A)

```

```

860 Y2 = ( - C - SQR (C * C - 4 * A * E)) / (2 * A)
870 IF Y1 < 0 THEN 910
880 PRINT SQR (Y1): PRINT
890 PRINT - SQR (Y1): PRINT
900 GOTO 930
910 PRINT "I*"; SQR ( - Y1): PRINT
920 PRINT "I*"; - SQR ( - Y1): PRINT
930 IF Y2 < 0 THEN 960
940 PRINT SQR (Y2): PRINT
950 PRINT - SQR (Y2): PRINT : GOTO 980
960 PRINT "I*"; SQR ( - Y2): PRINT
970 PRINT "I*"; - SQR ( - Y2): PRINT
980 END
990 :
1000 RE = - C / (2 * A):IM = SQR ( - K) / (2 * A)
1010 BT = SQR (RE * RE + IM * IM)
1020 R1 = SQR ((BT + RE) / 2):I1 = SQR ((BT - RE) / 2)
1030 BE = SQR (R1 * R1 + I1 * I1)
1040 R2 = SQR ((BE + R1) / 2):I2 = SQR ((BE - R1) / 2)
1050 PRINT R2;"*I"; - I2
1060 PRINT
1070 PRINT R2;"*I";I2
1080 PRINT
1090 PRINT - R2;"*I"; - I2
1100 PRINT
1110 PRINT - R2;"*I";I2
1120 PRINT
1130 END

```

## GLEICHUNG VIERTEN GRADES

$$A \cdot X^4 + B \cdot X^3 + C \cdot X^2 + D \cdot X + E$$

A, B, C, D, E ? 1, -24, 150, -200, -375

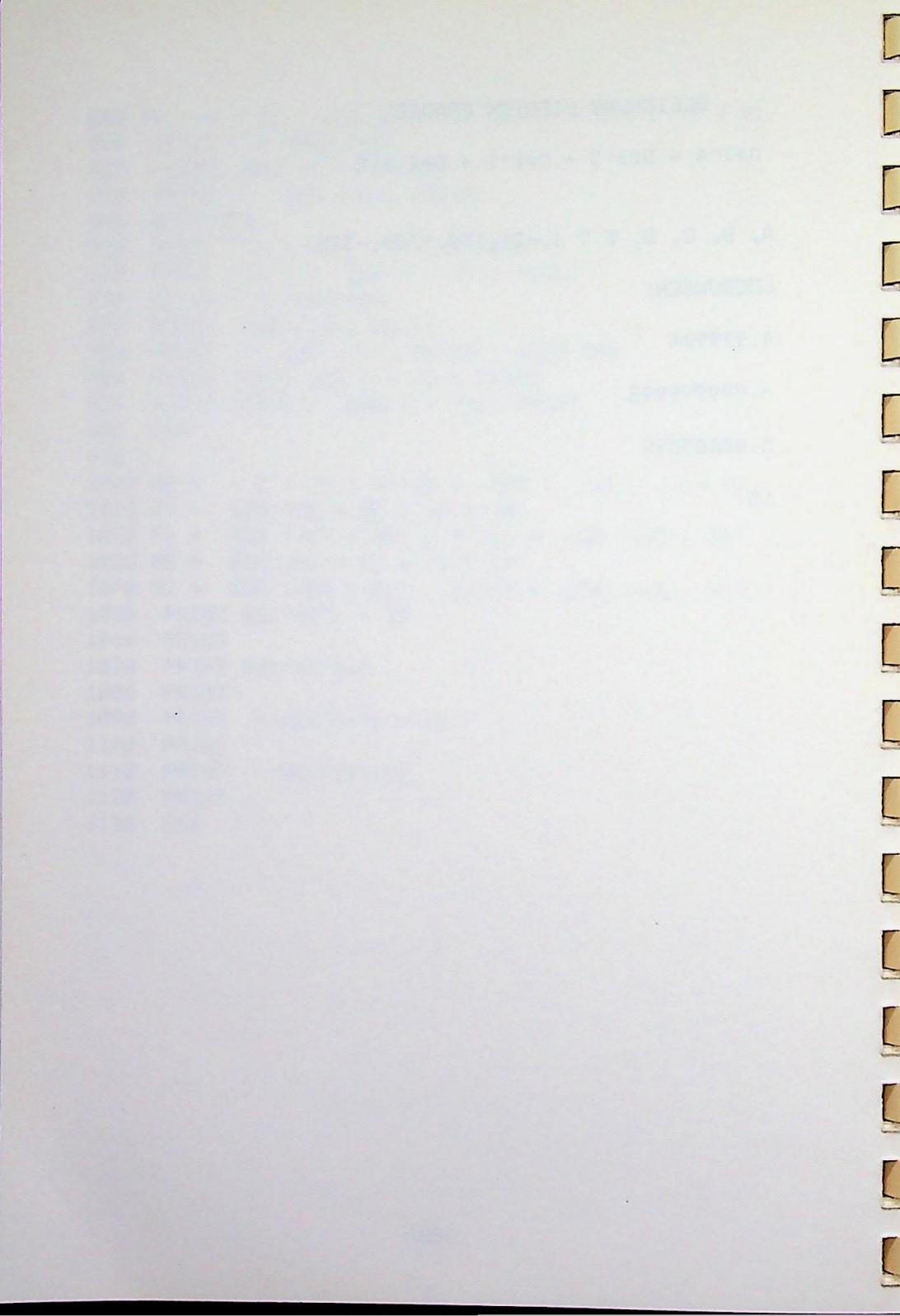
LOESUNGEN:

4.9999904

-.9999999993

5.00009599

15



## 19. POLYNOMBERECHNUNG

Das folgende Programm bestimmt zu vorgegebenen Nullstellen das zugehörige Polynom.

Die Koeffizienten  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) eines normierten Polynoms  $n$ -ten Grades

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

sind nach dem Satz von Vieta elementarsymmetrische Funktionen der Nullstellen  $x_i$ :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -a_{n-1}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \dots + x_{n-1} x_n = a_{n-2}$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_5 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -a_{n-3}$$

.....

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \cdot a_0$$

### Zum folgenden Programm

Das Programm berechnet die Koeffizienten des gesuchten Polynoms nach oben genannten Formeln iterativ innerhalb zweier verschachtelter Schleifen

```
220 A(0) = 0 : A(N) = 1
230 FOR I=N TO 1 STEP -1
240 FOR J=H TO 1 STEP -1
250 A(N-J) = A(N-J) - A(N-J+1) * X(N-I+1)
260 NEXT J
270 NEXT I
```

Als Programmbeispiel wird das Polynom mit den Nullstellen

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5 \text{ und } x_6 = 6$$

gesucht. Es ergibt sich das Polynom

$$P(x) = x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720.$$

Das Programm funktioniert nur für reelle Nullstellen. Für komplexe Nullstellen müssen die entsprechenden quadratischen Polynome multipliziert werden, dies kann mittels Programm 21 erfolgen.

```

10 REM POLYNOMBERECHNUNG
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " POLYNOMBERECHNUNG "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT
80 INPUT "WIEVIELE NULLSTELLEN ? ";N
90 DIM A(N),X(N)
100 :
110 PRINT
120 FOR I = 1 TO N
130 PRINT I;".NULLSTELLE ";; INPUT X(I)
140 A(I) = 0
150 NEXT I
160 :
170 PRINT " "
180 NORMAL : PRINT
190 A(0) = 0:A(N) = 1
200 FOR I = N TO 1 STEP - 1
210 FOR J = N TO 1 STEP - 1
220 A(N - J) = A(N - J) - A(N - J + 1) * X(N - I + 1)
230 NEXT J
240 NEXT I
250 :
260 PRINT "DIE KOEFFIZIENTEN SIND:"
270 PRINT
280 FOR I = N TO 0 STEP - 1
290 PRINT "A(";I;") = ";
300 IF A(I) > = 0 THEN PRINT " ";
310 PRINT A(I)
320 NEXT I
330 END

```

## POLYNOMBERECHNUNG

WIEVIELE NULLSTELLEN ? 6

1.NULLSTELLE ?1

2.NULLSTELLE ?2

3.NULLSTELLE ?3

4.NULLSTELLE ?4

5.NULLSTELLE ?5

6.NULLSTELLE ?6

DIE KOEFFIZIENTEN SIND:

$$A(6) = 1$$

$$A(5) = -21$$

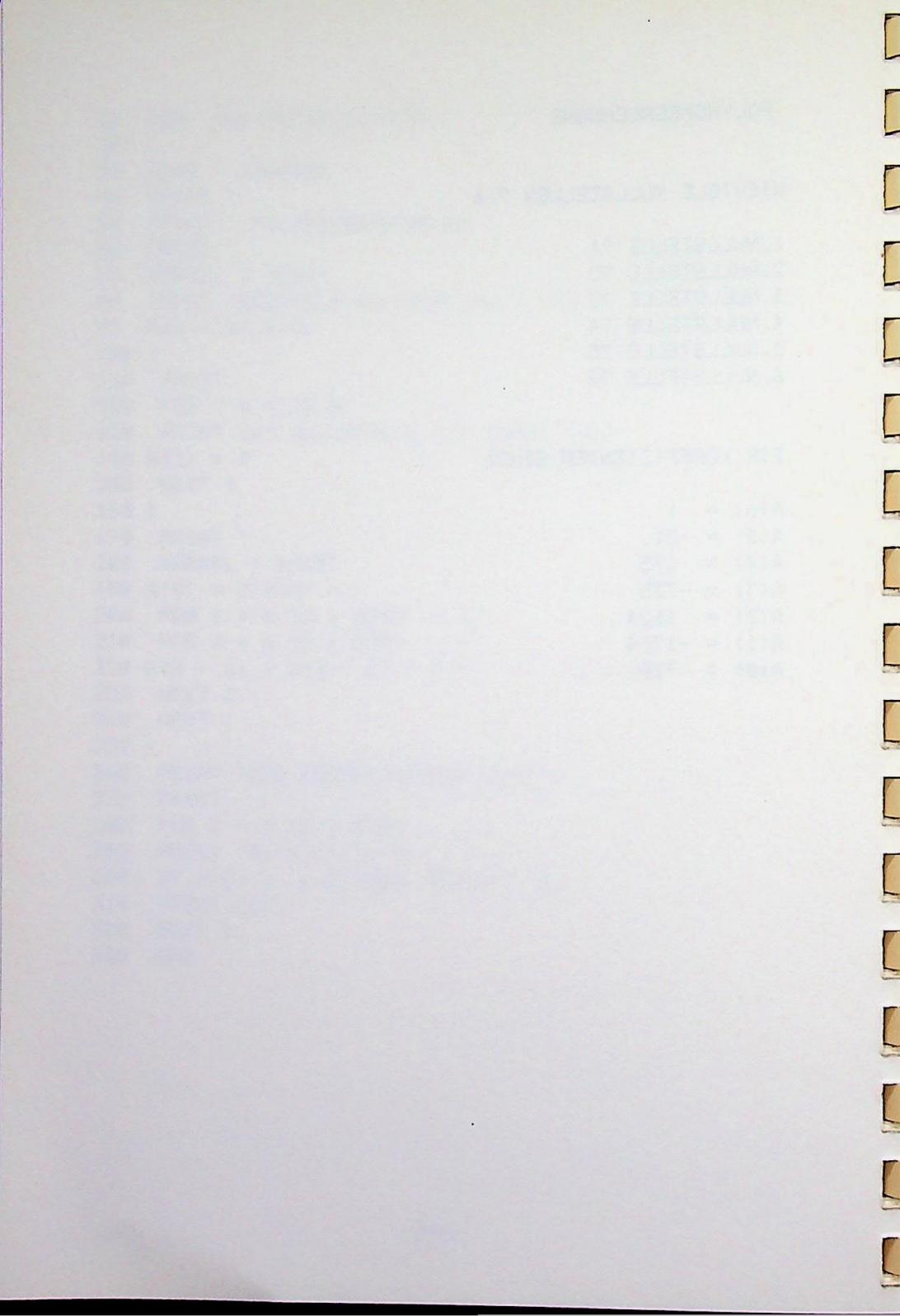
$$A(4) = 175$$

$$A(3) = -735$$

$$A(2) = 1624$$

$$A(1) = -1764$$

$$A(0) = 720$$



## 20. KOMPLEXES HORNERSHEMA

Mit Hilfe des Hornerschemas kann der Wert des Polynoms

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0.$$

an der Stelle  $x$  ohne Potenzieren ausgewertet werden. Dies kann mit folgendem Programmstück geschehen

```
100 F = A(N)
110 FOR I=N-1 TO 0 STEP -1
120 F=F * X + A(I)
130 NEXT I
```

Dabei ist  $N$  der Polynomgrad und  $F$  der gesuchte Funktionswert. Das Hornerschema ist auch im Betriebssystem von CBM-Rechnern enthalten; mit ihm werden alle transzendenten Funktionen wie  $\sin$ ,  $\arctan$  usw. über eine Polynomapproximation berechnet. Das angegebene Hornerschema kann auch für komplexe Zahlen angewendet werden. Dazu muß die komplexe Addition und Multiplikation geeignet sein. Sind die komplexen Zahlen als Zahlenpaare

(RE(1), IM(1)) (RE(2), IM(2))

gegeben, so kann die Addition wie folgt definiert werden

```
500 REM KOMPLEXE ADDITION
510 RE = RE(1) + RE(2)
520 IM = IM(1) + IM(2)
```

Entsprechend die Multiplikation

```
600 REM KOMPLEXE MULTIPLIKATION
610 RE = RE(1) * RE(2) - IM(1) * IM(2)
620 IM = RE(1) * IM(2) + RE(2) * IM(1)
```

Diese Rechenoperationen werden als Unterprogramm definiert und bei Bedarf angesprungen. Da jedoch in BASIC alle Variablen global sind, muß zuvor eine geeignete Parameterübergabe durchgeführt werden.

Da hier die komplexen Zahlen als Zahlenpaare behandelt werden, müssen entsprechend auch die Koeffizienten des Polynoms und der Argumentwert als Zahlenpaare eingelesen werden.

### Zum folgenden Programm

Als Beispiel wird der Funktionswert des komplexen Polynoms

$$p(z) = (1 + 1.5i)z^3 - z^2 + 3z + (1 + 2i)$$

an der Stelle

$$z = 1 - i$$

berechnet. Die Koeffizienten werden im Programm mittels DATA-Werten eingelesen.

Es ergibt sich der Polynomwert

$$5 - 4i.$$

```

10 REM KOMPLEXES HORNERSCHEMA
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " KOMPLEXES HORNERSCHEMA "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT : PRINT
80 READ N: REM POLYNOMGRAD
90 DIM R(N), I(N), RE(2), IM(2)
100 :
110 REM EINLESEN DER KOEFFIZIENTEN
120 FOR K = N TO 0 STEP - 1
130 READ R(K), I(K)
140 NEXT K
150 :
160 READ X, Y: REM ARGUMENT
170 :
180 REM HORNERSCHEMA
190 RE(1) = R(N): IM(1) = I(N)
200 FOR K = N - 1 TO 0 STEP - 1
210 RE(2) = X: IM(2) = Y
220 REM MULTIPLIKATION
230 GOSUB 430
240 RE(1) = RE: IM(1) = IM
250 :
260 RE(2) = R(K): IM(2) = I(K)
270 REM ADDITION
280 GOSUB 380
290 RE(1) = RE: IM(1) = IM
300 NEXT K
310 :
320 REM AUSGABE
330 PRINT "POLYNOMWERT = ";
340 IF IM(1) >= 0 THEN PRINT RE(1); " + I*"; IM(1): GOTO 360
350 PRINT RE(1); " - I*"; ABS (IM(1))
360 END
370 :
380 REM UNTERPROGRAMM KOMPLEXADDITION
390 RE = RE(1) + RE(2)
400 IM = IM(1) + IM(2)
410 RETURN
420 :

```

```
430 REM UNTERPROGRAMM KOMPLEXMULTIPLIKATION
440 RE = RE(1) * RE(2) - IM(1) * IM(2)
450 IM = RE(1) * IM(2) + RE(2) * IM(1)
460 RETURN
470 :
480 DATA 3
490 DATA 1,1.5,-1,0,3,0,1,2
500 DATA 1,-1
```

KOMPLEXES HORNERSHEMA

POLYNOMWERT = 5 -I\*4

## 21. POLYNOM-MULTIPLIKATION

Zwei Polynome vom Grad  $n$  und  $m$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$$

$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_0$$

werden multipliziert, indem man jeden Term des ersten Polynoms mit jedem des zweiten multipliziert.

Dies kann mit Hilfe zweier verschachtelter Schleifen geschehen

```
290 FOR I=0 TO N
300 FOR J=0 TO M
310 K = I + J
320 C(K) = C(K) + A(I) * B(J)
330 NEXT J
340 NEXT I
```

Das Verfahren läßt sich direkt auch auf Reihen übertragen; d.h. es liefert auch das Cauchy-Produkt zweier Reihenentwicklungen.

### Zum folgenden Programm

Das Programm berechnet nach dem angegebenen Verfahren das Produkt zweier Polynome und gibt die entsprechenden Koeffizienten aus.

Als Beispiel werden die Polynome

$$p(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 6x - 2 - a_0$$

$$q(x) = x^2 - 1$$

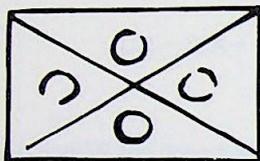
multipliziert. Eingabe der Koeffizienten von links nach rechts ins Programm liefert die Koeffizienten des Produktpolynoms

$$1, -5, 2, 11, -5, -6, 2$$

Das Ergebnis ist somit

$$x^6 - 5x^5 + 2x^4 + 11x^3 - 5x^2 - 6x + 2$$

	三	〇	六	九
			四	五
一	五	三	四	五
二	二	七	六	
三	八	一	〇	五



"Darstellung des Polynoms  
 $2x^3 + 15x^2 + 166x - 4460 = 0$   
 in Neue Schritte der Berechnung von Li Ye,  
 China 1259"

```

10 REM POLYNOM-MULTIPLIKATION
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " POLYNOM-MULTIPLIKATION "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT
80 :
90 INPUT "GRAD DES 1.POLINOMS ? ";N
100 PRINT
110 DIM A(N)
120 FOR I = N TO 0 STEP - 1
130 PRINT "KOEFFIZIENT VON X(";I;")";
140 INPUT A(I)
150 NEXT I
160 :
170 PRINT
180 INPUT "GRAD DES 2.POLYNOMS ? ";M
190 PRINT
200 DIM B(M),C(N + M)
210 FOR I = M TO 0 STEP - 1
220 PRINT "KOEFFIZIENT VON X(";I;")";
230 INPUT B(I)
240 NEXT I: PRINT
250 :
260 FOR I = 0 TO M + N
270 C(I) = 0
280 NEXT I
290 FOR I = 0 TO N
300 FOR J = 0 TO M
310 K = I + J
320 C(K) = C(K) + A(I) * B(J)
330 NEXT J
340 NEXT I
350 :
360 REM AUSGABE
370 PRINT "PRODUKTPOLYNOM:"
380 PRINT
390 FOR I = N + M TO 0 STEP - 1
400 PRINT C(I);" ";
410 NEXT I
420 END

```

## POLYNOM-MULTIPLIKATION

GRAD DES 1.POLINOMS ? 4

KOEFFIZIENT VON  $X(4)$ ? 1

KOEFFIZIENT VON  $X(3)$ ? -5

KOEFFIZIENT VON  $X(2)$ ? 3

KOEFFIZIENT VON  $X(1)$ ? 6

KOEFFIZIENT VON  $X(0)$ ? -2

GRAD DES 2.POLYNOMS ? 2

KOEFFIZIENT VON  $X(2)$ ? 1

KOEFFIZIENT VON  $X(1)$ ? 0

KOEFFIZIENT VON  $X(0)$ ? -1

PRODUKTPOLYNOM:

1 -5 2 11 -5 -6 2

## 22. POLYNOM-DIVISION

Die Polynom-Division findet vielfache Anwendung beim Abdividieren von gefundenen Nullstellen, bei der Partialbruchzerlegung u.s.w.

Die Polynom-Division kann in völliger Analogie zur gewöhnlichen Division durchgeführt werden:

Es wird geprüft, wie oft der entsprechende Koeffizient des Divisors in den Dividenten hineingeht. Das entsprechende Vielfache des Divisors wird dann vom Koeffizienten des Dividenten subtrahiert.

### Zum folgenden Programm

Das Programm dividiert zwei Polynome nach dem gewöhnlichen Divisionsverfahren.

Es wurde versucht Rundungsfehler aufzufangen, indem sehr kleine Reste Null gesetzt werden. Die Polynomgrade und Koeffizienten werden in Form von DATA-Werten eingelesen.

Als Beispiel werden die Polynome

$$2x^7 + 9x^6 - 5x^5 + 42x^4 - 24x^3 + 10x^2 + 21x - 8$$

$$x^3 + 5x^2 - 3x + 4$$

dividiert. Das Programm liefert den Quotienten

$$2x^4 - x^3 + 6x^2 + x - 7$$

mit dem Rest

$$24x^2 - 4x + 20$$

```

10 REM POLYNOMDIVISION
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " POLYNOMDIVISION "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT
80 READ N
90 DIM A(N + 1),B(N + 1),Q(N + 1),R(N + 1)
100 :
110 FOR I = N + 1 TO 1 STEP - 1
120 READ A(I): REM DIVIDEND
130 NEXT I
140 :
150 READ M
160 FOR I = M + 1 TO 1 STEP - 1
170 READ B(I): REM DIVISOR
180 NEXT I
190 :
200 PRINT "DIVIDEND: ";
210 FOR I = N + 1 TO 1 STEP - 1
220 PRINT A(I);" ";
230 NEXT I: PRINT
240 PRINT
250 PRINT "DIVISOR: ";
260 FOR I = M + 1 TO 1 STEP - 1
270 PRINT B(I);" ";
280 NEXT I: PRINT
290 :
300 R = N - M
310 FOR I = N + 1 TO M + 1 STEP - 1
320 Q(I - M) = A(I) / B(M + 1)
330 FOR J = 0 TO M
340 A(I - J) = A(I - J) - Q(I - M) * B(M + 1 - J)
350 IF ABS (A(I - J)) > = ABS (Q(I - M) * B(M + 1 -
J)) * 1E - 8 THEN 370
360 A(I - J) = 0
370 NEXT J
380 NEXT I
390 :
400 FOR I = R TO 1 STEP - 1
410 R(I) = A(I)

```

```

420 NEXT I
430 :
440 PRINT
450 PRINT "QUOTIENT: ";
460 FOR I = R + 1 TO 1 STEP - 1
470 PRINT Q(I);" ";
480 NEXT I: PRINT
490 :
500 PRINT
510 PRINT "REST: ";
520 IF R(R) = 0 THEN R = R - 1: GOTO 520
530 FOR I = R TO 1 STEP - 1
540 PRINT R(I);" ";
550 NEXT I
560 PRINT
570 END
580 :
590 DATA 7
600 DATA 2,9,-5,42,-24,10,21,-8
610 DATA 3
620 DATA 1,5,-3,4

```

### POLYNOMDIVISION

DIVIDEND: 2 9 -5 42 -24 10 21 -8

DIVISOR: 1 5 -3 4

QUOTIENT: 2 -1 6 1 -7

REST: 24 -4 20

1. [Faint text]

2. [Faint text]

3. [Faint text]

4. [Faint text]

5. [Faint text]

6. [Faint text]

7. [Faint text]

8. [Faint text]

9. [Faint text]

10. [Faint text]

11. [Faint text]

12. [Faint text]

13. [Faint text]

14. [Faint text]

15. [Faint text]

16. [Faint text]

17. [Faint text]

18. [Faint text]

19. [Faint text]

20. [Faint text]

21. [Faint text]

22. [Faint text]

23. [Faint text]

24. [Faint text]

25. [Faint text]

26. [Faint text]

27. [Faint text]

28. [Faint text]

29. [Faint text]

30. [Faint text]

31. [Faint text]

32. [Faint text]

33. [Faint text]

34. [Faint text]

35. [Faint text]

36. [Faint text]

37. [Faint text]

38. [Faint text]

39. [Faint text]

40. [Faint text]

41. [Faint text]

42. [Faint text]

43. [Faint text]

44. [Faint text]

45. [Faint text]

46. [Faint text]

47. [Faint text]

48. [Faint text]

49. [Faint text]

50. [Faint text]

51. [Faint text]

52. [Faint text]

53. [Faint text]

54. [Faint text]

55. [Faint text]

56. [Faint text]

57. [Faint text]

58. [Faint text]

59. [Faint text]

60. [Faint text]

61. [Faint text]

62. [Faint text]

63. [Faint text]

64. [Faint text]

65. [Faint text]

66. [Faint text]

67. [Faint text]

68. [Faint text]

69. [Faint text]

70. [Faint text]

71. [Faint text]

72. [Faint text]

73. [Faint text]

74. [Faint text]

75. [Faint text]

76. [Faint text]

77. [Faint text]

78. [Faint text]

79. [Faint text]

80. [Faint text]

81. [Faint text]

82. [Faint text]

83. [Faint text]

84. [Faint text]

85. [Faint text]

86. [Faint text]

87. [Faint text]

88. [Faint text]

89. [Faint text]

90. [Faint text]

91. [Faint text]

92. [Faint text]

93. [Faint text]

94. [Faint text]

95. [Faint text]

96. [Faint text]

97. [Faint text]

98. [Faint text]

99. [Faint text]

100. [Faint text]

## 23. MATRIZEN-MULTIPLIKATION

Matrizen sind rechteckige Anordnungen von reellen Zahlen. Eine Matrix hat die Ordnung  $(m, n)$ , wenn sie  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten besitzt.

Zwei Matrizen  $A$  und  $B$  werden multipliziert, indem man jede Zeile von  $A$  mit jeder Spalte von  $B$  multipliziert. Dies zeigt, daß das Produkt von  $A$  und  $B$  nur existiert, wenn die Spaltenzahl von  $A$  mit der Zeilenzahl von  $B$  übereinstimmt. Ist  $A$  von der Ordnung  $(n, m)$  und  $B$  der Ordnung  $(p, q)$  mit  $m=p$ , so ist die Produktmatrix von der Ordnung  $(n, q)$ .

Die Matrizenmultiplikation kann mit Hilfe von folgendem Programmstück durchgeführt werden

```
320 FOR I=1 TO N
330 FOR J=1 TO Q
340 S=0
350 FOR K=1 TO M
360 S=S + A(I,K) * B(K,J)
370 NEXT K
380 C(I,J) = S
390 NEXT J
400 NEXT I
```

### Zum folgenden Programm

Das folgende Programm berechnet das Produkt zweier Matrizen, die in Form von DATA-Werten eingelesen werden. Dabei wird geprüft, ob die Spaltenzahl der ersten Matrix mit der Zeilenzahl der zweiten übereinstimmt, andernfalls wird eine Fehlermeldung ausgegeben.

Im Programmbeispiel werden die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

miteinander multipliziert. Die Produktmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 1 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$$

(vgl. Programmausdruck).

```

10 REM MATRIZENMULTIPLIKATION
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " MATRIZEN-MULTIPLIKATION "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT
80 READ N,M: REM ORDNUNG DER 1.MATRIX
90 DIM A(N,M)
100 FOR I = 1 TO N
110 FOR J = 1 TO M
120 READ A(I,J)
130 NEXT J
140 NEXT I
150 :
160 READ P,Q: REM ORDNUNG DER 2.MATRIX
170 DIM B(P,Q)
180 IF M = P THEN 220
190 PRINT "SPALTENZAHL DER 1.MATRIX MUSS MIT DER "
200 PRINT "ZEILENZAHL DER 2.MATRIX UEBEREINSTIMMEN": END

210 :
220 FOR I = 1 TO P
230 FOR J = 1 TO Q
240 READ B(I,J)
250 NEXT J
260 NEXT I
270 :
280 FOR I = 1 TO N
290 FOR J = 1 TO Q
300 S = 0
310 FOR K = 1 TO M
320 S = S + A(I,K) * B(K,J)
330 NEXT K
340 C(I,J) = S
350 NEXT J
360 NEXT I
370 :
380 PRINT "PRODUKTMATRIX:"
390 PRINT
400 FOR I = 1 TO N
410 FOR J = 1 TO Q

```

```
420 IF C(I,J) > = 0 THEN PRINT " ";
430 PRINT C(I,J);" ";
440 NEXT J
450 PRINT
460 NEXT I
470 END
480 :
490 DATA 3,4
500 DATA 8,5,2,3
510 DATA 6,4,1,0
520 DATA 1,2,2,4
530 :
540 DATA 4,2
550 DATA 1,-2
560 DATA -2,3
570 DATA 1,1
580 DATA 1,2
```

## MATRIZEN-MULTIPLIKATION

PRODUKTMATRIX:

```
3 7
-1 1
3 14
```

100  
101  
102  
103  
104  
105  
106  
107  
108  
109  
110  
111  
112  
113  
114  
115  
116  
117  
118  
119  
120  
121  
122  
123  
124  
125  
126  
127  
128  
129  
130  
131  
132  
133  
134  
135  
136  
137  
138  
139  
140  
141  
142  
143  
144  
145  
146  
147  
148  
149  
150  
151  
152  
153  
154  
155  
156  
157  
158  
159  
160  
161  
162  
163  
164  
165  
166  
167  
168  
169  
170  
171  
172  
173  
174  
175  
176  
177  
178  
179  
180  
181  
182  
183  
184  
185  
186  
187  
188  
189  
190  
191  
192  
193  
194  
195  
196  
197  
198  
199  
200

201  
202  
203  
204  
205  
206  
207  
208  
209  
210  
211  
212  
213  
214  
215  
216  
217  
218  
219  
220  
221  
222  
223  
224  
225  
226  
227  
228  
229  
230  
231  
232  
233  
234  
235  
236  
237  
238  
239  
240  
241  
242  
243  
244  
245  
246  
247  
248  
249  
250  
251  
252  
253  
254  
255  
256  
257  
258  
259  
260  
261  
262  
263  
264  
265  
266  
267  
268  
269  
270  
271  
272  
273  
274  
275  
276  
277  
278  
279  
280  
281  
282  
283  
284  
285  
286  
287  
288  
289  
290  
291  
292  
293  
294  
295  
296  
297  
298  
299  
300

## 24. ZWEIERPOTENZEN VON MATRIZEN

Da für quadratische Matrizen die Zeilenzahl mit der Spaltenzahl übereinstimmt, können quadratische Matrizen mit sich selbst multipliziert werden.

Solche Potenzen von Matrizen haben zahlreiche Anwendungen in der numerischen und Wirtschaftsmathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Graphentheorie.

Als Beispiel werden hier die (homogenen) Markowketten herausgegriffen: Hat ein System endlich viele Zustände und geht ein Zustand  $i$ , unabhängig von seinem vorhergehenden Zustand, in den Zustand  $j$  mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_{ij}$$

über, so stellt das System eine Markowkette (auch Markoff geschrieben) dar. Die Matrix  $P$  mit den Elementen

$$p_{ij}$$

heißt eine stochastische Matrix. Solche Matrizen sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre Zeilensumme den Wert 1 haben, da die Summe aller Übergangswahrscheinlichkeiten natürlich den Wert 1 hat.

Hat dieses System ein stationäres Verhalten, d.h. strebt es einer Grenzverteilung zu, so kann diese Grenzverteilung durch fortgesetztes Potentieren berechnet werden [10].

Multipliziert man die Matrix mit sich selbst und quadriert das jeweilige Ergebnis, so erhält man die Zweierpotenzen der Matrix.

### Zum folgenden Programm

In einem bestimmten Land gebe es 3 Parteien A, B und C. Folgendes Wahlverhalten sei gegeben:

80% aller A-Wähler wählen bei der nächsten Wahl wieder A, 10% B und 10% C.

70% aller B-Wähler wählen bei der nächsten Wahl wieder B, 15% A und 15% C.

60% aller C-Wähler wählen bei der nächsten Wahl wieder C, 20% A und 20% B.

Damit ergibt sich folgende stochastische Matrix

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.15 & 0.7 & 0.15 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Wie man dem Programmausdruck entnimmt, nähern sich die Zeilen der Matrixpotenzen dem Vektor

$$(0.461912194 \quad 0.307419108 \quad 0.230668699)$$

Dieser stellt die Grenzverteilung dar; d.h. auf lange Sicht wählen

46.2 %	aller Wähler	A
30.7 %		B
23.1 %		C

```

10 REM ZWEIERPOTENZ EINER MATRIX
20 HOME : INVERSE
30 PRINT " "
40 PRINT " ZWEIERPOTENZ EINER MATRIX "
50 PRINT " "
60 NORMAL : PRINT
70 :
80 INPUT "WELCHE ZWEIERPOTENZ ? ";P
90 P = LOG (P) / LOG (2)
100 :
110 PRINT
120 INPUT "ORDNUNG DER MATRIX ? ";N
130 PRINT
140 PRINT "GIB MATRIX ELEMENTWEISE EIN..."
150 PRINT
160 FOR I = 1 TO N
170 FOR J = 1 TO N
180 INPUT A(I,J)
190 NEXT J
200 NEXT I
210 :
220 FOR L = 1 TO P
230 PRINT
240 PRINT 2 ^ L;".POTENZ:"
250 FOR I = 1 TO N
260 FOR J = 1 TO N
270 S = 0
280 FOR K = 1 TO N
290 S = S + A(I,K) * A(K,J)
300 NEXT K
310 B(I,J) = S
320 IF S >= 0 THEN PRINT " ";
330 PRINT S;" ";
340 NEXT J: PRINT
350 NEXT I
360 :
370 REM UMSPEICHERN
380 FOR I = 1 TO N
390 FOR J = 1 TO N
400 A(I,J) = B(I,J)
410 NEXT J
420 NEXT I
430 NEXT L
440 END

```

## ZWEIERPOTENZ EINER MATRIX

WELCHE ZWEIERPOTENZ ? 16

ORDNUNG DER MATRIX ? 3

GIB MATRIX ELEMENTWEISE EIN...

? .8

? .1

? .1

? .15

? .7

? .15

? .2

? .2

? .6

2.POTENZ:

.675 .17 .155

.255 .535 .21

.31 .28 .41

4.POTENZ:

.547025 .2491 .203875

.37365 .388375 .237975

.40775 .3173 .27495

8.POTENZ:

.475442597 .297697678 .226859726

.446546516 .319420823 .234032661

.453719452 .312043548 .234237001

16.POTENZ:

.461912194 .307419108 .230668699

.461128662 .307993905 .230877434

.461337397 .307836579 .230826025

## 25. MITTELWERTE

Neben dem arithmetischen Mittel  $A$  der Zahlen  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )

$$A = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \dots + x_n)$$

sind auch andere Mittelwerte von Bedeutung:

das geometrische Mittel

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n}$$

das harmonische Mittel

$$\frac{1}{H} = n \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

das quadratische Mittel

$$Q = \sqrt{\frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_n^2)}$$

Das meistgenutzte arithmetische Mittel ist sehr empfindlich gegen Ausreißer; d.h. bei kleinen Zahlenreihen wird das arithmetische Mittel durch einen zufällig großen Wert verfälscht. In diesem Fall sollte man lieber den Median (vgl. Programm 26) nehmen.

Das geometrische Mittel ist stets bei prozentualen Größen zu nehmen. Wird z.B. eine Gehaltserhöhung von 3% erst zum 1. Juni ausgezahlt, so ist die effektive Gehaltserhöhung nur

$$\left( \sqrt[12]{1.037} - 1 \right) \cdot 100 \% = 1.7 \%$$

Hier findet man häufig falsche Angaben, auch in angesehenen Tageszeitungen. Fährt ein Auto eine Strecke bergauf mit 30 km/h und bergab mit 90 km/h, so ist die Durchschnittsgeschwindigkeit keineswegs 60 km/h, sondern nur das harmonische Mittel von 45 km/h.

Für das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel gilt die Ungleichung von Cauchy

$$A \geq G \geq H$$

Das quadratische Mittel hat große Bedeutung in der Statistik, da die Standardabweichung einer Meßreihe gleich dem quadratischen Mittel der einzelnen Abweichungen ist.

### Zum folgenden Programm

Das Programm berechnet für beliebige Zahlenreihen das arithmetische, geometrische, harmonische und quadratische Mittel nach den oben angegebenen Formeln.

Als Beispiel wurde die Zahlenreihe:

19, 22, 20, 18, 19, 23, 17, 21, 25, 17

eingegeben. Es ergeben sich folgende gerundete Mittel:

arithmetisches M.:	20.10
geometrisches M.:	19.95
harmonisches M.:	19.80
quadratisches M.:	20.26

```

10 REM MITTELWERTE
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " MITTELWERTE "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT
80 INPUT "WIEVIELE ZAHLEN ? ";N
90 PRINT
100 A = 0:G = 1
110 H = 0:Q = 0
120 FOR I = 1 TO N
130 PRINT I;".TE ZAHL ";: INPUT X
140 A = A + X
150 G = G * X
160 IF X = 0 THEN PRINT : PRINT "HARMONISCHES MITTEL
    NICHT DEFINIERT"; CHR$ (7): END
170 H = H + 1 / X
180 Q = Q + X * X
190 NEXT I
200 PRINT
210 :
220 A = A / N
230 G = G ^ (1 / N)
240 H = N / H
250 Q = SQR (Q / N)
260 :
270 PRINT "ARITHMETISCHES MITTEL= ";A
280 PRINT "GEOMETRISCHES MITTEL = ";G
290 PRINT "HARMONISCHES MITTEL = ";H
300 PRINT "QUADRATISCHES MITTEL = ";Q
310 END

```

## MITTELWERTE

WIEVIELE ZAHLEN ? 10

1. TE ZAHL ?19
2. TE ZAHL ?22
3. TE ZAHL ?20
4. TE ZAHL ?18
5. TE ZAHL ?19
6. TE ZAHL ?23
7. TE ZAHL ?17
8. TE ZAHL ?21
9. TE ZAHL ?25
10. TE ZAHL ?17

ARITHMETISCHES MITTEL = 20.1  
GEOMETRISCHES MITTEL = 19.9481092  
HARMONISCHES MITTEL = 19.8012891  
QUADRATISCHES MITTEL = 20.2558634

## 26. STATISTISCHE MITTELWERTE

Neben dem arithmetischen Mittel werden in der Statistik auch noch andere Mittelwerte betrachtet.

Der Modus ist der häufigste Wert einer Stichprobe oder einer Meßwertreihe. Für Durchschnittslohnangaben ist sicher der Modus aussagekräftiger als der Mittelwert, der durch Bezieher sehr großer Einkommen verfälscht wird.

Denkt man sich alle Stichprobenwerte der Größe nach geordnet, so stellt das in der Mitte liegende Element den Median dar. Ist die Zahl der Werte gerade, so wählt man den Mittelwert der beiden mittleren Elemente zum Median; z.B. beim Stichprobenumfang 100 ist der Median das Mittel aus dem 50. und 51. Stichprobenwert. Der Median hat sehr große Bedeutung beim Testen auf vorgegebene Verteilungen (siehe z.B. [16]). Bei einer geringen Zahl von Stichprobenwerten ist das arithmetische Mittel besonders empfindlich gegen "Ausreißer". So verwendet die Stiftung Warentest als mittleren Preis eines Gerätes den Median, wenn weniger als 5 Geräte gekauft werden.

Weitere Parameter, die die Verteilung von Zahlen kennzeichnen, sind die Varianz, die Schiefe und der Exzeß.

Sind  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) die Stichprobenwerte, so stellt

$$V = \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}$$

die Varianz dar. Sie ist ein Maß für die Streuung der Werte um ihren Mittelwert. Die Quadratwurzel aus der Varianz wird Standardabweichung  $\sigma$  genannt. Im Falle einer Normalverteilung gibt letztere Zahl den Bereich um den Mittelwert an, in dem sich 65% aller Werte befinden.

Die Schiefe wird berechnet aus

$$\gamma = \left( \frac{\sum x_i^3}{n} - 3 \frac{\sum x_i^2}{n} \cdot \frac{\sum x_i}{n} + 2 \left( \frac{\sum x_i}{n} \right)^3 \right) / \sigma^3$$

Sie ist ein Maß für die Symmetrie der Verteilung.

Der Exzeß

$$\epsilon = \left( \frac{\sum x_i^4}{n} - 4 \frac{\sum x_i^3}{n} \cdot \frac{\sum x_i}{n} + 6 \frac{\sum x_i^2}{n} \left( \frac{\sum x_i}{n} \right)^2 - 3 \left( \frac{\sum x_i}{n} \right)^4 \right) / \sigma^4 - 3$$

(auch Wölbung genannt) ist ein Maß für die Steilheit der Kurve. Positiver Exzeß zeigt, daß die Verteilungskurve steiler als die Normalverteilung verläuft, negative Werte zeigen einen flacheren Verlauf. Für die Normalverteilung verschwindet sowohl Schiefe wie Exzeß.

### **Zum folgenden Programm**

Gibt man die Stichprobenwerte in Form von DATA-Werten ein, so werden die oben genannten statistischen Kennwerte nach den angegebenen Formeln berechnet. Existieren zwei Werte mit gleich großer Häufigkeit, so wird der kleinere als Modus gewählt.

Für die Stichprobe

(18, 20, 21, 19, 22, 23, 17, 21, 18, 24)

können die sich ergebenden Maßzahlen dem Programmausdruck entnommen werden.

Die Schiefe ist klein, da genau 5 Werte unter und 5 Werte über dem Mittel von 20.3 liegen.

Der Exzeß ist negativ, dies zeigt eine flache Verteilung an.

```

10 REM STATISTISCHE MITTELWERTE
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " STATISTISCHE MITTELWERTE "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT
80 READ N
90 DIM X(N),H(N)
100 :
110 M = 0:S = 0:T = 0:U = 0
120 FOR I = 1 TO N
130 READ X
140 M = M + X
150 S = S + X ^ 2
160 T = T + X ^ 3
170 U = U + X ^ 4
180 H(I) = 1:X(I) = X
190 NEXT I
200 A = M / N
210 :
220 REM BUBBLESORT
230 F = 1
240 FOR I = 1 TO N - 1
250 IF X(I) < X(I + 1) THEN 280
260 H = X(I):X(I) = X(I + 1)
270 X(I + 1) = H:F = 0
280 NEXT I
290 IF F = 0 THEN 230
300 :
310 PRINT "MITTELWERT="; HTAB 22: PRINT A
320 V = S / N - A ^ 2
330 PRINT "VARIANZ="; HTAB 22: PRINT V
340 SG = SQR (V)
350 PRINT "STANDARDABWEICHUNG="; HTAB 22: PRINT SG
360 :
370 SF = (T / N - 3 * A * S / N + 2 * (A ^ 3)) / (SG ^
3)
380 PRINT "SCHIEFE="; HTAB 22: PRINT SF
390 :
400 E = (U / N - 4 * A * T / N + 6 * S * (A ^ 2) / N -
3 * (A ^ 4)) / (SG ^ 4) - 3

```

```

410 :
420 PRINT "EXZESS(WOELBUNG)=";: HTAB 22: PRINT E
430 :
440 IF N / 2 < > INT (N / 2) THEN ME = X((N + 1) /
      2): GOTO 460
450 ME = (X(N / 2) + X(N / 2 + 1)) / 2
460 PRINT "MEDIAN=";: HTAB 22: PRINT ME
470 :
480 REM FREQUENZZAEHLUNG
490 FOR I = 2 TO N
500 IF X(I) < > X(I - 1) THEN 520
510 H(I) = H(I) + 1
520 NEXT I
530 K = 0
540 FOR I = 2 TO N
550 IF H(I) > H(I - 1) THEN K = I
560 NEXT I
570 PRINT "MODUS=";: HTAB 22
580 IF K < > 0 THEN PRINT X(K): END
590 PRINT "NICHT DEFINIERT"
600 END
610 DATA 10
620 DATA 18,20,21,19,22,23,17,21,18,24

```

#### STATISTISCHE MITTELWERTE

MITTELWERT=	20.3
VARIANZ=	4.80999997
STANDARDABWEICHUNG=	2.19317121
SCHIEFE=	.127403993
EXZESS(WOELBUNG)=	-1.15515941
MEDIAN=	20.5
MODUS=	21

## 27. PYTHAGOREISCHE ZAHLEN

Ganzzahlige Lösungen  $\neq \emptyset$  der Diophantischen Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

heißen pythagoreische Zahlen. Ein Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn seine Seitenlängen pythagoreische Zahlen sind.

Setze man zwei solcher rechtwinkeligen Dreiecke mit gleicher Kathete zusammen, so erhält man ein Dreieck, dessen Höhe ganzzahlig ist. Die Seitenlängen eines solchen Dreiecks nennt man auch Heronsche Zahlen, da sie rationale Werte der Heronschen Flächenformel liefern.

Bekannte pythagoreische Tripel sind

$$(3, 4, 5)$$

$$(8, 6, 10)$$

$$(5, 12, 13)$$

$$(9, 12, 15)$$

Pythagoreische Zahlen können durch die Formeln

$$x = u^2 - v^2$$

$$y = 2uv$$

$$z = u^2 + v^2$$

erzeugt werden; dabei durchlaufen  $u$  und  $v$  alle natürlichen Zahlen. Die obengenannten Tripel erhält man für

$$u = 2, v = 1$$

$$u = 3, v = 1$$

$$u = 3, v = 2$$

$$u = 4, v = 2$$

Wie man an den Beispielen sieht, sind auch stets alle Vielfachen eines solchen Tripels wieder pythagoreisch. Im folgenden Programm werden daher nur teilerfremde Tripel erzeugt.

### Zum folgenden Programm

Das folgende Programm berechnet nach dem oben angegebenen Verfahren beliebig viele pythagoreische Zahlen, wobei Vielfache anderer Tripel ausgeschlossen werden.

Die ersten 20 vom Programm erzeugten Zahlentripel können dem Programmausdruck entnommen werden.

```

10 REM PYTHAGOREISCHE ZAHLEN
20 :
30 HOME : INVERSE
40 :
50 PRINT " "
60 PRINT " PYTHAGOREISCHE ZAHLEN "
70 PRINT " "
80 NORMAL : PRINT
90 INPUT "WEITER <RETURN>";T$
100 HOME
110 U = 2:Z = 1
120 GOSUB 420
130 :
140 V = U - 1
150 A = U * U - V * V
160 B = 2 * U * V
170 C = U * U + V * V
180 PRINT Z;: HTAB 8
190 PRINT A;: HTAB 16
200 PRINT B;: HTAB 24
210 PRINT C;
220 PRINT
230 Z = Z + 1
240 IF (Z - 1) / 10 < > INT ((Z - 1) / 10) THEN 320

250 PRINT
260 PRINT "WEITER <RETURN> ODER <E>NDE ?";
270 GET A$: IF A$ = "" THEN 270
280 IF A$ = "E" THEN END
290 HOME
300 GOSUB 420
310 :
320 V = V - 2
330 IF V < = 0 THEN U = U + 1: GOTO 140
340 V1 = V:U2 = U
350 N = INT (U2 / V1)
360 U1 = U2 - N * V1
370 IF U1 < > 0 THEN U2 = V1:V1 = U1: GOTO 350
380 IF V1 < > 1 THEN 320
390 GOTO 150
400 END
410 :

```

```

420 PRINT "PYTHAGOREISCHE ZAHLEN"
430 PRINT "-----"
440 PRINT
450 PRINT "NR.      A          B          C"
460 PRINT
470 RETURN

```

PYTHAGOREISCHE ZAHLEN

WEITER <RETURN>  
 PYTHAGOREISCHE ZAHLEN

```

-----
NR.      A          B          C
1         3          4          5
2         5          12         13
3         7          24         25
4        15          8          17
5         9          40         41
6        21          20         29
7        11          60         61
8        35          12         37
9        13          84         85
10       33          56         65

```

WEITER <RETURN> ODER <E>NDE ?



## 28. KOORDINATEN BESONDERER DREIECKSPUNKTE

Sind  $p_1, p_2, p_3$  die Ortsvektoren der Dreiecks-Eckpunkte, so ergeben sich die Ortsvektoren der besonderen Dreieckspunkte aus folgenden Formeln:

Schwerpunkt

$$s = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}$$

Inkreismittelpunkt

$$i = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3}{a_1 + a_2 + a_3}$$

Höhenschnittpunkt

$$h = \frac{t_1 p_1 + t_2 p_2 + t_3 p_3}{t_1 t_2 t_3}$$

Umkreismittelpunkt

$$u = \frac{c_1 s_1 p_1 + c_2 s_2 p_2 + c_3 s_3 p_3}{2 s_1 s_2 s_3}$$

dabei stellen  $a_1, a_2, a_3$  die Seitenlängen,  
 $s_1, s_2, s_3$  die Sinuswerte,  
 $c_1, c_2, c_3$  die Cosinuswerte,  
 $t_1, t_2, t_3$  die Tangenswerte

des Dreiecks dar.

### Zum folgenden Programm

Das Programm berechnet die 4 besonderen Punkte eines Dreiecks nach den oben angegebenen Vektorgleichungen.

Als Programmbeispiel wird das räumliche Dreieck

$$(5 | 0 | -4), (-2 | 6 | 3), (6 | -3 | -5)$$

behandelt. Es ergeben sich folgende Werte,

Schwerpunkt:

$$(3 | 1 | -2)$$

Inkreismittelpunkt:

$$(4.60337933 \mid -0.50521699 \mid -3.60337933)$$

Höhenschnittpunkt:

$$(14.6 \mid 17.0666654 \mid -13.56)$$

Umkreismittelpunkt:

$$(-2.8 \mid -7.03333264 \mid 3.8)$$

Zur Kontrolle kann man den Satz anwenden, daß der Schwerpunkt die Strecke Umkreismittelpunkt – Höhenschnittpunkt im Verhältnis 1:2 teilt

$$s = \frac{1}{3} (2 \cdot u + h)$$

Dies ist, wie man leicht nachrechnet, erfüllt.

```

10 REM KOORDINATEN V.BES. DREIECKSPUNKTEN
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " KOORDINATEN BESONDERER "
60 PRINT " "
70 PRINT " DREIECKSPUNKTE "
80 PRINT " "
90 NORMAL : PRINT
100 PRINT "GIB KOORD.DES 1.PUNKTS EIN ";; INPUT X(1),
X(2),X(3)
110 PRINT "GIB KOORD.DES 2.PUNKTS EIN ";; INPUT Y(1),
Y(2),Y(3)
120 PRINT "GIB KOORD.DES 3.PUNKTS EIN ";; INPUT Z(1),
Z(2),Z(3)
130 PRINT
140 :
150 REM SEITENVEKTOREN
160 P(1,1) = Y(1) - Z(1):P(1,2) = Y(2) - Z(2):P(1,3) =
Y(3) - Z(3)
170 P(2,1) = Z(1) - X(1):P(2,2) = Z(2) - X(2):P(2,3) =
Z(3) - X(3)
180 P(3,1) = X(1) - Y(1):P(3,2) = X(2) - Y(2):P(3,3) =
X(3) - Y(3)
190 :
200 REM SEITENLAENGEN
210 FOR I = 1 TO 3
220 S = 0
230 FOR J = 1 TO 3
240 S = S + P(I,J) ^ 2
250 NEXT J
260 A(I) = SQR (S)
270 NEXT I
280 :
290 REM COSINUSWERTE
300 C = 0
310 FOR I = 1 TO 3
320 C = C + P(2,I) * P(1,I)
330 NEXT I
340 C(3) = - C / (A(1) * A(2)):C = 0
350 FOR I = 1 TO 3
360 C = C + P(3,I) * P(1,I)

```

```

370 NEXT I
380 C(2) = - C / (A(1) * A(3)):C = 0
390 FOR I = 1 TO 3
400 C = C + P(3,I) * P(2,I)
410 NEXT I
420 C(1) = - C / (A(2) * A(3))
430 :
440 REM SINUS- U. TANGENSWERTE
450 FOR I = 1 TO 3
460 S(I) = SQR (1 - C(I) ^ 2)
470 IF C(I) = 0 THEN T(I) = 1E30: GOTO 490
480 T(I) = S(I) / C(I)
490 NEXT I
500 :
510 PRINT "SCHWERPUNKT:"
520 FOR I = 1 TO 3
530 PRINT (X(I) + Y(I) + Z(I)) / 3;" ";
540 NEXT I: PRINT : PRINT
550 :
560 PRINT "INKREISMITTELPUNKT:"
570 U = A(1) + A(2) + A(3)
580 FOR I = 1 TO 3
590 PRINT (A(1) * X(I) + A(2) * Y(I) + A(3) * Z(I)) /
U;" ";
600 NEXT I: PRINT : PRINT
610 :
620 T = T(1) * T(2) * T(3)
630 IF T = 0 THEN 690
640 PRINT "HOEHENSCHNITTPUNKT:"
650 FOR I = 1 TO 3
660 PRINT (T(1) * X(I) + T(2) * Y(I) + T(3) * Z(I)) /
T;" ";
670 NEXT I: PRINT : PRINT
680 :
690 S = 2 * S(1) * S(2) * S(3)
700 IF S = 0 THEN 750
710 PRINT "UMKREISMITTELPUNKT:"
720 FOR I = 1 TO 3
730 PRINT (C(1) * S(1) * X(I) + C(2) * S(2) * Y(I) +
S(3) * C(3) * Z(I)) / S;" ";
740 NEXT I: PRINT : PRINT
750 END

```

# KOORDINATEN BESONDERER

## DREIECKSPUNKTE

GIB KOORD. DES 1. PUNKTS EIN ?5,0,-4  
GIB KOORD. DES 2. PUNKTS EIN ?-2,6,3  
GIB KOORD. DES 3. PUNKTS EIN ?6,-3,-5

SCHWERPUNKT:

3 1 -2

INKREISMITTELPUNKT:

4.60337933 -0.50521699 -3.60337933

HOEHENSCHNITTPUNKT:

14.59999994 17.06666654 -13.59999996

UMKREISMITTELPUNKT:

-2.799999992 -7.03333264 3.799999997

100  
101  
102  
103  
104  
105  
106  
107  
108  
109  
110  
111  
112  
113  
114  
115  
116  
117  
118  
119  
120  
121  
122  
123  
124  
125  
126  
127  
128  
129  
130  
131  
132  
133  
134  
135  
136  
137  
138  
139  
140  
141  
142  
143  
144  
145  
146  
147  
148  
149  
150  
151  
152  
153  
154  
155  
156  
157  
158  
159  
160  
161  
162  
163  
164  
165  
166  
167  
168  
169  
170  
171  
172  
173  
174  
175  
176  
177  
178  
179  
180  
181  
182  
183  
184  
185  
186  
187  
188  
189  
190  
191  
192  
193  
194  
195  
196  
197  
198  
199  
200

## 29. POLYGON-BERECHNUNG

Das folgende Programm berechnet Flächeninhalt und Umfang eines Vielecks bei bekannten Koordinaten der Eckpunkte. Der Flächeninhalt wird nach der Formel, vgl. [4]

$$A = [(x_1 + x_2) (y_1 - y_2) + (x_2 + x_3) (y_2 - y_3) + \dots + (x_n + x_1) (y_n - y_1)] / 2$$

berechnet.

Da der Abstand des Punktes  $(x_{i+1} | y_{i+1})$  vom Punkt  $(x_i | y_i)$  nach Pythagoras gleich

$$d = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

ist, ergibt sich der Umfang des Vielecks durch Aufsummieren der Abstände der einzelnen Eckpunkte.

Der Schwerpunkt ergibt sich aus

$$x_s = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) (x_i + x_{i+1}) \quad \text{mit } x_{n+1} = x_1$$

$$y_s = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) (y_i + y_{i+1}) \quad y_{n+1} = y_1$$

### Zum folgenden Programm

Das Programm berechnet für ein beliebiges Vieleck Umfang und Flächeninhalt. Bei der Eingabe der Koordinaten muß darauf geachtet werden, daß der Umlaufsinn eingehalten wird, da die Formel nicht für "überschlagene" Vielecke gilt.

Als Programmbeispiel wird das Sechseck

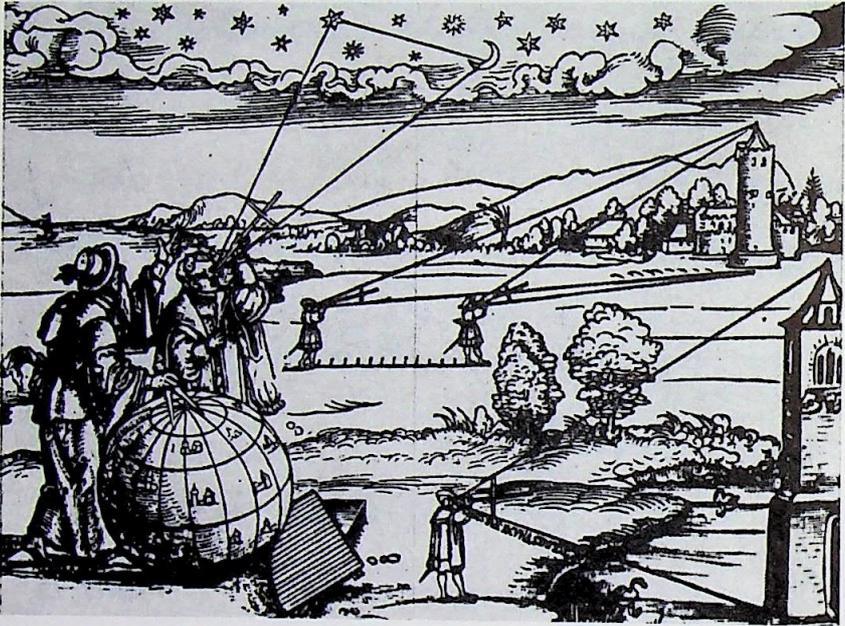
$$(4 | 2), (10 | 0), (12 | 9), (8 | 11), (3 | 5), (0 | 3)$$

gewählt. Es ergibt sich

$$\text{Flächeninhalt} = 67$$

$$\text{Umfang} = 35.5551423$$

$$\text{Schwerpunkt} = (7.35323384 | 5.20895523)$$



“Visieren von Winkeln mit Hilfe des Jakobstabs. Holzschnitt aus dem 16. Jahrhundert”

```

10 REM POLYGON-BERECHNUNG
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " POLYGON-BERECHNUNG "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT
80 :
90 INPUT "WIEVIELE ECKPUNKTE ? ";N
100 DIM X(N + 1),Y(N + 1)
110 :
120 PRINT
130 PRINT "GIB KOORDINATEN DER ECKPUNKTE"
140 PRINT "IM GLEICHEN UMLAUFSINN EIN !"
150 PRINT
160 FOR I = 1 TO N
170 PRINT "X(";I;"),Y(";I;") ";
180 INPUT X(I),Y(I)
190 NEXT I
200 :
210 X(N + 1) = X(1)
220 Y(N + 1) = Y(1)
230 :
240 REM FLAECHEBERECHNUNG
250 F = 0
260 FOR I = 1 TO N
270 F = F + X(I) * Y(I + 1) - X(I + 1) * Y(I)
280 NEXT I
290 F = ABS (F) / 2
300 :
310 REM UMFANGSBERECHNUNG
320 U = 0
330 FOR I = 1 TO N
340 U = U + SQR ((X(I + 1) - X(I)) ^ 2 + (Y(I + 1) -
Y(I)) ^ 2)
350 NEXT I
360 :
370 REM SCHWERPUNKTSKOORDINATEN
380 XS = 0:YS = 0
390 FOR I = 1 TO N
400 XS = XS + (X(I) * Y(I + 1) - X(I + 1) * Y(I)) * (X
(I) + X(I + 1))

```

```

410 YS = YS + (X(I) * Y(I + 1) - X(I + 1) * Y(I)) * (Y
      (I) + Y(I + 1))
420 NEXT I
430 XS = XS / (6 * F)
440 YS = YS / (6 * F)
450 :
460 REM AUSGABE
470 PRINT
480 PRINT "FLAECHEINHALT=";: HTAB 16: PRINT F
490 PRINT "UMFANG=";: HTAB 16: PRINT U
500 PRINT "SCHWERPUNKT=";: HTAB 16
510 PRINT "(";XS;" , ";YS;)"
520 END

```

#### POLYGON-BERECHNUNG

WIEVIELE ECKPUNKTE ? 6

GIB KOORDINATEN DER ECKPUNKTE  
IM GLEICHEN UMLAUFSSINN EIN !

```

X(1),Y(1) ?4,2
X(2),Y(2) ?10,0
X(3),Y(3) ?12,9
X(4),Y(4) ?8,11
X(5),Y(5) ?3,5
X(6),Y(6) ?0,3

```

FLAECHEINHALT=67

UMFANG= 35.5551423

SCHWERPUNKT: (7.35323384 , 5.20895523)

## 30. DETERMINANTE

Determinanten haben zahlreiche Anwendungen: Mit ihrer Hilfe kann geprüft werden, ob

- Vektoren linear abhängig sind
- ein lineares Gleichungssystem lösbar ist
- zwei Polynome gemeinsame Nullstellen haben
- ein Extremum einer Funktion mehrerer Variablen vorliegt

usw.

Die Resultante der Polynome

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$$

$$g(x) = 6x^2 + 8x + 9$$

$$\text{Det}(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

z.B. ist genau dann Null, wenn  $f$  und  $g$  mindestens eine gemeinsame Nullstelle haben. Hier gilt  $\text{Det}(f,g) = 2873$ , somit haben  $f$  und  $g$  keine gemeinsamen Nullstellen. Ersetzt man  $g$  durch die Ableitung  $f'$  von  $f$ , so gibt die Determinante Auskunft, ob  $f$  mehrfache Nullstellen hat.

Erwähnenswert ist auch die Cramersche Regel, die erlaubt einzelne Unbekannte eines Gleichungssystems zu finden, ohne das ganze System lösen zu müssen. Ein Programm dazu findet sich in [15].

### Zum folgenden Programm

Das Programm berechnet die Determinante durch fortgesetztes Entwickeln nach der 1. Spalte.

Dazu werden die Zeilen 2 bis  $n$  mit dem Element  $a_{11} \neq 0$  multipliziert. Dadurch vervielfacht sich zunächst der Wert der Determinante um

$$a_{11}^{n-1}$$

Der entsprechende Faktor wird sodann abdividiert. Subtrahiert man von jeder der Zeilen 2 bis n das

$a_{j1}$ -fache von Zeile 1

so wird in der 1. Spalte der Vektor

$$(1 \mid 0 \mid 0 \mid \dots \mid 0)$$

erzeugt.

Entwickelt man nun nach der 1. Spalte, so verbleibt eine Determinante der Ordnung  $n-1$ .

Setzt man das Verfahren fort, so verringert sich die Ordnung der Determinante bei jedem Schritt, bis sie nur noch zweireihig ist. Im letzteren Fall kann der Wert leicht ermittelt werden.

Die Determinante wird im Programm in Form von DATA-Werten eingelesen.

Als Beispiel wird die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

berechnet. Das Programm liefert den Wert  $-6$ .

```

10 REM DETERMINANTE
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " DETERMINANTE "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT
80 READ N: REM ORDNUNG DER DETERMINANTE
90 DIM A(N,N),B(N,N)
100 :
110 PRINT "DETERMINANTE"
120 PRINT
130 FOR I = 1 TO N
140 FOR J = 1 TO N
150 READ A(I,J): PRINT A(I,J);" ";
160 NEXT J: PRINT
170 NEXT I
180 :
190 D = 1: REM DETERMINANTE
200 M = N: REM ZAEHLER
210 :
220 REM PIVOTSUCHE
230 P = 0
240 IF ABS (A(1,1)) > 1E - 5 THEN 400
250 FOR K = 2 TO M
260 IF ABS (A(1,K)) < = ABS (A(1,K - 1)) THEN 280
270 P = A(1,K):L = K
280 NEXT K
290 IF P = 0 THEN D = 0: GOTO 610
300 :
310 REM SPALTENTAUSCH
320 FOR J = 1 TO M
330 H = A(J = L)
340 A(J,L) = A(J,1)
350 A(J,1) = H
360 NEXT J
370 D = - D
380 :
390 REM ENTWICKLUNG NACH DER 1.SPALTE
400 FOR J = 2 TO M
410 FOR K = 2 TO M
420 A(J,K) = A(1,1) * A(J,K) - A(J,1) * A(1,K)

```

```

430 NEXT K
440 NEXT J
450 T = SGN (A(1,1)) * ABS (A(1,1) ^ (M - 2))
460 D = D / T
470 FOR J = 2 TO M
480 FOR K = 2 TO M
490 A(J - 1,K - 1) = A(J,K)
500 NEXT K
510 NEXT J
520 :
530 M = M - 1
540 IF M > 2 THEN 220
550 :
560 REM ZWEIREIHIGE DETERMINANTE
570 D = D * (A(1,1) * A(2,2) - A(1,2) * A(2,1))
580 :
590 REM AUSGABE
600 PRINT
610 PRINT "DETERMINANTE = ";D
620 END
630 :
640 DATA 6
650 DATA 1,2,3,4,5,6
660 DATA 2,2,3,4,5,6
670 DATA 3,3,3,4,5,6
680 DATA 4,4,4,4,5,6
690 DATA 5,5,5,5,5,6
700 DATA 6,6,6,6,6,6

```

DETERMINANTE

DETERMINANTE

```

1 2 3 4 5 6
2 2 3 4 5 6
3 3 3 4 5 6
4 4 4 4 5 6
5 5 5 5 5 6
6 6 6 6 6 6

```

DETERMINANTE = -6

## 31. MÜLLER-ITERATION

Die Iteration ist eine Programmiermethode, bei der durch zahlreiche Iterationsschritte ein gesuchter Punkt immer näher eingekreist und schließlich mit der vorgegebenen Genauigkeit bestimmt wird.

Iterationsverfahren werden hauptsächlich zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen genutzt, da z.B. Nullstellen von Polynomen vom Grad  $>4$  nicht mehr formelmäßig berechnet werden können. Iterationen finden jedoch auch Anwendung bei der Lösung von großen linearen Gleichungssystemen (z.B. beim Gauß-Seidel-Verfahren).

Ein einfaches Verfahren ist die sog. Fixpunkt-Iteration

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

Dabei wird der Graph der Funktion  $F(x)$  mit der Geraden  $y = x$  zum Schnitt gebracht.

Bei der Regula falsi

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

wird die Nullstelle der Verbindungsgerade zweier Graphenpunkte von  $f(x)$  bestimmt.

Bessere Konvergenz erzielt das Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

bei dem jeweils die Nullstelle der Tangente bestimmt wird. Die Newton-Iteration läßt sich auf nichtlineare Systeme und somit auch auf komplexe Gleichungen ausdehnen (siehe Programm 33). Programme zu den erwähnten Iterationsverfahren finden sich z.B. in [15] und [17].

Die Müller-Iteration (1956) (in der englischsprachigen Literatur Muller genannt) kann als Verallgemeinerung der Regula falsi aufgefaßt werden. Im Gegensatz zu dieser wird durch 3 Kurvenpunkte eine Parabel gelegt und deren Nullstelle bestimmt. Die Bestimmung der Parabelgleichung erfolgt mittels Interpolation.

Sind  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  die 3 Kurvenpunkte bzw. die Startwerte, so berechnet man den nächsten Iterationswert aus

$$x = x_3 + I (x_3 - x_2)$$

Der Faktor  $I$  berechnet sich aus dem Quotienten

$$I = \frac{-2Df(x_3)}{G \pm \sqrt{G^2 - 4DCf(x_3)}}$$

Die Konstanten ergeben sich aus

$$G = L^2 f(x_1) - D^2 f(x_2) + (L+D) f(x_3)$$

$$C = L (L f(x_1) - D f(x_2) + f(x_3))$$

mit

$$L = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}$$

$$D = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

Das Vorzeichen im Nenner von  $I$  wird aus numerischen Gründen so gewählt, daß der Nenner möglichst groß wird.

Wegen der im Nenner auftretenden Wurzel könnte das Verfahren auch ins Komplexe gehen. Da die komplexe Newton-Iteration effektiver ist, ist das hier angegebene Müller-Verfahren auf das Reelle beschränkt.

### Zum folgenden Programm

Die zu lösende nichtlineare Gleichung ist im Programm in Zeile 150 zu definieren. Der Startwert, die Abbruchgenauigkeit und die max. Zahl der Iterationen werden über INPUT eingegeben.

Liegt der Startwert in der Nähe der gesuchten Nullstelle, so ist die Konvergenz gut. Bei Funktionen, die keine reellen Nullstellen haben, kann die Iteration manchmal zwischen zwei Werten hin- und herpendeln und so Konvergenz vortäuschen. Zur Kontrolle wird daher im Programm noch der Funktionswert des letzten Iterationsschritts mit ausgedruckt.

Als Programmbeispiel wird das kubische Polynom

$$x^3 - x - 1$$

behandelt. Beim Startwert 1 ergibt sich in 5 Iterationsschritten die Nullstelle

$$x = 1.32471796$$

auf Maschinengenauigkeit. Der zugehörige Funktionswert ist

$$f(x) = -4.65661287 \cdot 10^{-10}$$

```

10 REM  MUELLER-INTERATION
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT "
50 PRINT " MUELLER-INTERATION "
60 PRINT "
70 PRINT " F(X) = X^3-X-1 "
80 PRINT "
90 NORMAL : PRINT
100 :
110 REM  DEFINIEREN DER FUNKTION IN 150
120 DEF FN F(X) = X ^ 3 - X - 1
130 :
140 INPUT "STARTWERT          ? ";X0
150 PRINT : INPUT "ABBRUCHGENAUIGKEIT ? ";E
160 PRINT : INPUT "ZAHL DER INTERATIONEN ? ";N
170 PRINT
180 :
190 REM  STARTWERTE
200 K = 1:D = .5
210 X3 = X0: PRINT X0
220 X1 = X3 - D
230 X2 = X3 + D
240 :
250 REM  MUELLER-INTERPOLATION
260 IF X2 = X1 THEN X2 = X2 + 1E - 8
270 L1 = (X3 - X2) / (X2 - X1)
280 D1 = (X3 - X1) / (X2 - X1)
290 IF K > 1 THEN 320
300 E1 = FN F(X1)
310 E2 = FN F(X2)
320 E3 = FN F(X3)
330 A1 = L1 ^ 2 * E1 - D1 ^ 2 * E2 + (L1 + D1) * E3
340 C1 = L1 * (L1 * E1 - D1 * E2 + E3)
350 B = A1 ^ 2 - 4 * D1 * C1 * E3
360 :
370 REM  INTERATION
380 IF B < 0 THEN B = 0
390 IF A1 < 0 THEN A1 = A1 - SQR (B)
400 IF A1 > 0 THEN A1 = A1 + SQR (B)
410 IF ABS (A1) + ABS (B) = 0 THEN A1 = 4 * D1 * E3

```

```

420 IF A1 = 0 THEN A1 = 1E - 8
430 L = - 2 * D1 * E3 / A1
440 X = X3 + L * (X3 - X2)
450 PRINT X
460 :
470 REM PRUEFEN AUF KONVERGENZ
480 IF ABS (X - X3) < E * ABS (X3) THEN 590
490 IF K < N THEN 520
500 PRINT
510 PRINT "KEINE KONVERGENZ NACH";N;"INTERATIONEN": END

520 K = K + 1
530 X1 = X2
540 X2 = X3
550 X3 = X
560 E1 = E2:E2 = E3
570 GOTO 260
580 :
590 PRINT
600 PRINT "FUNKTIONSWERT = "; FN F(X3)
610 END

```

#### MUELLER-INTERATION

$$F(X) = X^3 - X - 1$$

```

STARTWERT           ? 1
ABBRUCHGENAUIGKEIT ? 1E-8
ZAHL DER INTERATIONEN ? 50

```

```

1
1.31344632
1.32456943
1.32471808
1.32471796
1.32471796

```

```

FUNKTIONSWERT = -4.65661287E-10

```

## 32. MÜLLER-ITERATION (ZWEIDIMENSIONAL)

Die Müller-Iteration (Programm 31) läßt sich auch auf Funktionen

$$f(x, y)$$

zweier Variablen ausdehnen.

Dabei wird die x-y-Ebene in einfachen Müller-Iterationsschritten rechteckig in x- und y-Richtung durchlaufen

$$x = x_3 + l_1 (x_3 - x_2)$$

$$y = y_3 + l_2 (y_3 - y_2)$$

Das Verfahren bricht ab, wenn die Änderung der x- bzw. y-Werte die vorgegebene Abbruchgenauigkeit unterschreitet.

### Zum folgenden Programm

Startwerte und Abbruchgenauigkeit werden mittels INPUT eingegeben. Das Programm ist gegen das Verschwinden des Nenners gesichert, jedoch nicht das Überschreiten des Wertebereichs (Overflow).

Als Beispiel wird die Funktion

$$f(x, y) = e^y - x^2 - 2$$

behandelt.

Für die Startwerte  $x=1, y=1$  erhält man in 2 Schritten die Lösung

$$x = 0.847515091, y = 1$$

Analog liefern die Startwerte  $x=1, y=0$  die Lösung

$$x = -1.15802104, y = 1.20627398$$

Da die Funktion unendlich viele Nullstellen hat, erhält man für verschiedene Startwerte wechselnde Lösungen. Sie erfüllen die Gleichung

$$y = \ln(x^2 + 2)$$

die man erhält, wenn man die gegebene Funktionsgleichung nach y auflöst.

```

10 REM MUELLER-ITERATION ZWEIDIMENSIONAL
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " MUELLER-ITERATION ZWEIDIMENSIONAL "
60 PRINT " "
70 PRINT " F(X,Y) = EXP(Y) - X^2 - 2 "
80 PRINT " "
90 NORMAL : PRINT
100 :
110 REM FUNKTION IN ZEILE 700 EINGEBEN
120 :
130 INPUT "STARTWERTE X,Y ? ";X0,Y0
140 INPUT "ABBRUCHGENAUIGKEIT ? ";E
150 INPUT "ZAHL DER ITERATIONEN ? ";N
160 PRINT
170 :
180 REM ANFANGSWERTE
190 K = 1:B1 = .5:B2 = B1
200 :
210 X = X0:Y = Y0
220 PRINT X,Y
230 X3 = X0
240 X1 = X3 - B1
250 X2 = X3 + B1
260 :
270 REM MUELLER-INTERPOLATION
280 IF X2 = X1 THEN X2 = X2 + 1E - 8
290 L1 = (X3 - X2) / (X2 - X1)
300 D1 = (X3 - X1) / (X2 - X1)
310 Y = Y0:X = X1
320 GOSUB 670:E1 = W
330 X = X2
340 GOSUB 670:E2 = W
350 X = X3
360 GOSUB 670:E3 = W
370 GOSUB 720
380 B1 = L * (X3 - X2)
390 X = X3 + B1
400 :
410 REM PRUEFEN AUF KONVERGENZ
420 IF ABS (B1) + ABS (B2) < E THEN B30

```

```

430 X0 = X
440 Y3 = Y0
450 Y1 = Y3 - B2
460 Y2 = Y3 + B2
470 IF Y2 = Y1 THEN Y2 = Y2 + 1E - 8
480 L1 = (Y3 - Y2) / (Y2 - Y1)
490 D1 = (Y3 - Y1) / (Y2 - Y1)
500 Y = Y1
510 GOSUB 670:E1 = W
520 Y = Y2
530 GOSUB 670:E2 = W
540 Y = Y3
550 GOSUB 670:E3 = W
560 GOSUB 720
570 B2 = L * (Y3 - Y2)
580 Y = Y3 + B2
590 IF ABS (B1) + ABS (B2) < E THEN 830
600 IF K < N THEN 630
610 PRINT
620 PRINT "KEINE KONVERGENZ NACH ";N;" ITERATIONEN": END

630 K = K + 1
640 Y0 = Y
650 GOTO 210
660 :
670 REM FUNKTIONSAUSWERTUNG
680 W = EXP (Y) - X ^ 2 - 2
690 RETURN
700 :
710 REM HILFSPROGRAMM
720 A1 = L1 ^ 2 * E1 - D1 ^ 2 * E2 + (L1 + D1) * E3
730 C1 = L1 * (L1 * E1 - D1 * E2 + E3)
740 B = A1 ^ 2 - 4 * D1 * C1 * E3
750 IF B < 0 THEN B = 0
760 IF A1 < 0 THEN A1 = A1 - SQR (B)
770 IF A1 > 0 THEN A1 = A1 + SQR (B)
780 IF ABS (A1) + ABS (B) = 0 THEN A1 = 4 * D1 * E3

790 IF A1 = 0 THEN A1 = 1E - 8
800 L = - 2 * D1 * E3 / A1
810 RETURN
820 :
830 PRINT : PRINT "FUNKTIONSWERT = ";
840 Y = Y3:X = X3: GOSUB 680

```

850 PRINT W  
860 END

MUELLER-ITERATION ZWEIDIMENSIONAL

$$F(X, Y) = \exp(Y) - X^2 - 2$$

STARTWERTE X, Y           ? 1, 1  
ABBRUCHGENAUIGKEIT       ? 1E-6  
ZAHL DER ITERATIONEN     ? 30

1                         1  
.847515091                1

FUNKTIONSWERT = -9.31322575E-10

MUELLER-ITERATION ZWEIDIMENSIONAL

$$F(X, Y) = \exp(Y) - X^2 - 2$$

STARTWERTE X, Y           ? 1, 0  
ABBRUCHGENAUIGKEIT       ? 1E-6  
ZAHL DER ITERATIONEN     ? 30

1                         0  
-.999999999               1.20627398  
-1.15802104               1.20627398

FUNKTIONSWERT = 0

### 33. NEWTON-ITERATION IM KOMPLEXEN

Die Newton-Iteration im Reellen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

kann auch auf die komplexe Ebene ausgedehnt werden

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

Um eine komplexe Arithmetik zu vermeiden, wird die Funktion  $f$  und ihre Ableitung  $f'$  in Real- und Imaginärteil zerlegt

$$f(z) = u + iv$$

$$f'(z) = u_x + iu_y$$

Damit erhält man

$$\frac{f}{f'} = \frac{u + iv}{u_x + iu_y} = \frac{uu_x + vu_y}{u_x^2 + u_y^2} + i \frac{vu_x - uu_y}{u_x^2 + u_y^2}$$

durch Erweitern mit dem Konjugiert-Komplexen des Nenners. Dabei stellen

$$u_x, u_y$$

die partiellen Ableitungen von  $u$  nach  $x$  bzw.  $y$  dar. Trennt man Real- und Imaginärteil, so erhält man die komplexe Newton-Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{uu_x + vu_y}{u_x^2 + u_y^2}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{vu_x - uu_y}{u_x^2 + u_y^2}$$

Polynome können mit Hilfe der binomischen Formel in Real- und Imaginärteil zerlegt werden. Z.B. gilt

$$\begin{aligned} z^3 + 1 &= (x + iy)^3 + 1 \\ &= x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 + 1 \end{aligned}$$

Dies liefert den Realteil  $u = x^3 - 3xy^2 + 1$  und Imaginärteil  $v = 3x^2y - y^3$ .

Andere Funktionen können mit Hilfe eines geeigneten Tafelwerks zerlegt werden. Nach [4] gilt z.B.

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

Dabei treten die hyperbolischen Funktionen  $\sinh$  bzw.  $\cosh$  auf.

### Zum folgenden Programm

Der Realteil  $u$  bzw. Imaginärteil  $v$  der Funktion muß im Programm als Unterprogramm in den Zeilen 360 - 370 vereinbart werden. Die partiellen Ableitungen von  $u$  nach  $x$  und  $y$  folgen in den Programmzeilen 390 - 400.

Die Startwerte, die Abbruchgenauigkeit und die maximale Zahl der Iterationen wird über INPUT-Anweisungen eingegeben.

Als Programmbeispiel wird die Gleichung

$$z^3 + 1$$

gelöst. Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil ist

$$u = x^3 - 3xy^2 + 1, \quad v = 3x^2y - y^3$$

die partiellen Ableitungen von  $u$  nach  $x$  bzw.  $y$  sind

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \quad u_y = -6xy$$

Eingabe der Startwerte  $x=1, y=1$  liefert die Nullstelle

$$0.5 + i * 0.866025403$$

Entsprechend liefern die Startwerte  $x=1, y=-1$  die Nullstelle

$$0.5 - i * 0.866025403$$

bzw.  $x=1, y=0$  die Nullstelle

$$-0.999999999 + i * 0.$$

Die exakten Nullstellen sind hier

$$-1 \text{ und } \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

```

10 REM NEWTON-VERFAHREN IM KOMPLEXEN
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " NEWTON-VERFAHREN KOMPLEX "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT
80 INPUT "STARTWERTE ? ";X0,Y0
90 INPUT "GENAUIGKEIT ? ";E
100 INPUT "ZAHL DER ITERATIONEN ? ";N
110 PRINT
120 :
130 REM ANFANGSWERTE
140 K = 0
150 PRINT X0,Y0
160 :
170 REM ITERATION
180 K = K + 1
190 X = X0:Y = Y0
200 GOSUB 350
210 G = U1 ^ 2 + U2 ^ 2
220 IF G = 0 THEN PRINT "GRADIENT IST NULLVEKTOR": END

230 X = X0 + (V * U2 - U * U1) / G
240 Y = Y0 - (V * U1 + U * U2) / G
250 PRINT X,Y
260 :
270 REM KONVERGENZTEST
280 IF (X0 - X) ^ 2 + (Y0 - Y) ^ 2 < E ^ 2 THEN END

290 IF K < N THEN 310
300 PRINT "KEINE KONVERGENZ NACH ";N;" ITERATIONEN": END

310 X0 = X
320 Y0 = Y
330 GOTO 180
340 :
350 REM FUNKTIONSUNTERPROGRAMM
360 U = X ^ 3 - 3 * X * Y ^ 2 + 1
370 V = 3 * X ^ 2 * Y - Y ^ 3
380 REM ABLEITUNGEN
390 U1 = 3 * X ^ 2 - 3 * Y ^ 2

```

```
400 U2 = - 6 * X * Y
410 RETURN
```

### NEWTON-VERFAHREN KOMPLEX

```
STARTWERTE           ? 1,1
GENAUIGKEIT          ? 1E-5
ZAHL DER ITERATIONEN ? 10
```

1	1
.666666667	.833333333
.508691916	.841099874
.499329996	.866269171
.499999911	.866024903
.5	.866025403

ÜRUN

### NEWTON-VERFAHREN KOMPLEX

```
STARTWERTE           ? 1,-1
GENAUIGKEIT          ? 1E-5
ZAHL DER ITERATIONEN ? 20
```

1	-1
.666666667	-.833333333
.508691916	-.841099874
.499329996	-.866269171
.499999911	-.866024903
.5	-.866025403

# NEWTON-VERFAHREN KOMPLEX

STARTWERTE ? 1,0  
GENAUIGKEIT ? 1E-5  
ZAHL DER ITERATIONEN ? 20

1	Ø
.3333333334	Ø
-2.777777777	Ø
-1.89505185	Ø
-1.35618683	Ø
-1.08535856	Ø
-1.00653708	Ø
-1.00004236	Ø
-1	Ø
-.999999999	Ø

1950

1950

1950

1950

1950

1950

## 34. NEVILLE-INTERPOLATION

Unter Interpolation versteht man Aufsuchen von Zwischenwerten einer tabellierten Funktion. Im Gegensatz dazu wird bei der Extrapolation ein Wert außerhalb des tabellierten Bereichs gesucht.

Sind die Funktionswerte  $Z(I)$  an den Stellen  $X(I)$  gegeben und soll an der Stelle  $X$  interpoliert werden, so läßt sich die Neville-Interpolation wie folgt beschreiben

```
260 FOR K=1 TO N
270 FOR I=K+1 TO N
280 IF I=N+1 THEN 330
290 Z(I) = (Z(I) * Y(K) - Z(K) * Y(I)) / (Y(K) - Y(I))
300 NEXT I
310 NEXT K
```

Dabei gilt

$$Y(I) = X - X(I)$$

$N$  ist die Anzahl der vorgegebenen Funktionswerte,  $Z(N)$  der gesuchte, interpolierte Funktionswert.

Die in Programmzeile 290 auftretenden Differenzen heißen dividierte Differenzen. Mit ihrer Hilfe kann auch das Polynom vom Grad höchstens  $N-1$  bestimmen, das durch die vorgegebenen Punkte geht. Ein Programm zur Newton-Interpolation findet sich in [17].

### Zum folgenden Programm

Im Programm wird nach dem Neville-Verfahren im angegebenen Punkt interpoliert.

Folgende Funktionsstellen  $(x|y)$  seien gegeben:

$$(-4 | -26), (-1 | 4), (0 | 2), (2 | 16)$$

Gesucht werde der Funktionswert im Punkt  $x=1$ .

Das Programm liefert den Funktionswert

$$f(1) = 4$$

Das interpolierende Polynom ist hier

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$$

wie man leicht nachrechnet.

```

10 REM NEVILLE-INTERPOLATION
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT "
50 PRINT " NEVILLE-INTERPOLATION "
60 PRINT "
70 NORMAL : PRINT
80 :
90 INPUT "WIEVIELE STUETZSTELLEN ? ";N
100 DIM X(N),Y(N),Z(N)
110 :
120 PRINT
130 INPUT "X-WERT " ? ";X
140 :
150 PRINT
160 FOR I = 1 TO N
170 PRINT "X(";I;"),Y(";I;") "
180 INPUT " ? ";X(I),Y(I)
190 Z(I) = Y(I):Y(I) = X - X(I)
200 NEXT I
210 :
220 FOR K = 1 TO N
230 FOR I = K + 1 TO N
240 IF I = N + 1 THEN 290
250 Z(I) = (Y(K) * Z(I) - Y(I) * Z(K)) / (Y(K) - Y(I))

260 NEXT I
270 NEXT K
280 :
290 PRINT
300 PRINT "INTERPOL. WERT Y = ";Z(N)
310 END

```

## NEVILLE-INTERPOLATION

WIEVIELE STUETZSTELLEN ? 4

X-WERT ? 1

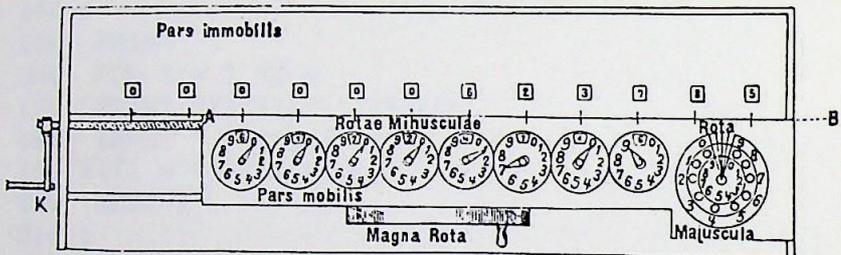
X(1), Y(1) ? -4, -26

X(2), Y(2) ? -1, 4

X(3), Y(3) ? 0, 2

X(4), Y(4) ? 2, 16

INTERPOL. WERT Y = 4



“Skizze der Rechenmaschine von Gottfried Leibniz (Entwurf 1673)”

## 35. GAUSS-JORDAN-VERFAHREN

Löst man im Gleichungssystem

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n$$

die k-te Gleichung nach der Unbekannten  $x_k$  auf, so erhält man

$$x_k = (-a_{k1} x_1 - a_{k2} x_2 - \dots - a_{kn} x_n + b_k) / a_{kk}$$

Dies setzt voraus, daß das Diagonalelement  $a_{kk} \neq 0$  ist. Ist  $a_{kk} = 0$  oder sehr klein, so führt man eine entsprechende Spalten- oder Zeilenvertauschung durch. Findet sich keine Zeile oder Spalte, die ein Element  $\neq 0$  liefert, so ist die entsprechende Matrix singular, d.h. die Determinante der Matrix verschwindet und das Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar.

Setzt man diese Unbekannte  $x_k$  in alle anderen Gleichungen ein, so verschwindet sie aus diesen Gleichungen, d.h. sie wird eliminiert. Führt man dies für alle Unbekannten durch, so bleibt in der 1. Zeile nur noch die  $x_1$ , in der 2. noch  $x_2$  und entsprechend in der k-ten Zeile  $x_k$  übrig.

Man hat somit ein Gleichungssystem erhalten, in dem die Unbekannten nur noch in der Diagonale der Matrix stehen

$$d_{11} x_1 = c_1$$

$$d_{22} x_2 = c_2$$

$$d_{33} x_3 = c_3$$

.....

$$d_{nn} x_n = c_n$$

Dieses Gleichungssystem kann sehr einfach gelöst werden

$$x_k = \frac{c_k}{d_{kk}}; d_{kk} \neq 0$$

Lineare Gleichungssysteme finden zahlreiche Anwendungen bei

- Dimensionierung elektrischer Schaltkreise
  - der Lösung von partiellen Differentialgleichungen
  - Vektorrechnung
  - Input- und Outputmodellen der Wirtschaft
  - Ausgleichsrechnung
  - elastische Verformungen von Fachwerken, Karosserien
- usw.

Zur Konstruktion eines Flugzeugflügels treten z.B. Gleichungssysteme mit mehr als 20.000 Unbekannten auf.

### Zum folgenden Programm

Das Programm löst beliebige lineare Gleichungssysteme, bei denen die Zahl der Unbekannten mit der Zahl der Gleichungen übereinstimmt.

Gibt es mehr Unbekannte als Gleichungen, so heißt das System unterbestimmt, im umgekehrten Fall überbestimmt. Zur Lösung von überbestimmten Gleichungssystemen, wie sie bei der linearen Regression auftreten, gibt es spezielle Verfahren wie z.B. die Methode der kleinsten Quadrate.

Als Programmbeispiel wird das Gleichungssystem mit 6 Unbekannten behandelt.

$$\begin{aligned}6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 11 \\-3x_1 - 7x_2 + 4x_4 - 2x_5 + x_7 &= -5 \\4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 + 2x_5 + x_7 &= 28 \\2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 7x_4 - 3x_5 + 2x_7 &= -6 \\-x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 8x_5 - 2x_7 &= 25 \\3x_1 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 - 6x_7 &= -4\end{aligned}$$

Die Anzahl der Unbekannten und die Gleichungsmatrix mit rechter Seite wird im Programm in Form von DATA-Werten eingelesen.

Das Programm liefert hier die exakten Lösungen

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5 \text{ und } x_6 = 6.$$

```

10 REM GAUSS-JORDAN-VERFAHREN
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " GRAUSS-JORDAN-VERFAHREN "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT
80 PRINT
90 PRINT "GLEICHUNGSSYSTEM:"
100 PRINT
110 :
120 READ N
130 DIM A(N,N + 1),X(N)
140 :
150 REM EINLESEN DES GLEICHUNGSSYSTEMS
160 FOR I = 1 TO N
170 FOR J = 1 TO N + 1
180 READ A(I,J)
190 IF A(I,J) > = 0 THEN PRINT " ";
200 PRINT A(I,J);" ";
210 NEXT J
220 PRINT
230 NEXT I
240 :
250 FOR K = 1 TO N
260 IF K = N THEN 390
270 G = A(K,K)
280 M = K
290 FOR I = K + 1 TO N
300 IF ABS (A(I,K)) < = G THEN 330
310 G = ABS (A(I,K))
320 M = I
330 NEXT I
340 FOR J = K TO N + 1
350 H = A(K,J)
360 A(K,J) = A(M,J)
370 A(M,J) = H
380 NEXT J
390 IF ABS (A(K,K)) < = 1E - 8 THEN PRINT "SINGULA
ER": END
400 FOR I = 1 TO N
410 IF I = K THEN 460

```

```

420 F = A(I,K) / A(K,K)
430 FOR J = K + 1 TO N + 1
440 A(I,J) = A(I,J) - A(K,J) * F
450 NEXT J
460 NEXT I
470 NEXT K
480 :
490 REM AUFLOESUNG
500 FOR I = 1 TO N
510 X(I) = A(I,N + 1) / A(I,I)
520 NEXT I
530 :
540 PRINT
550 PRINT "LOESUNG:"
560 PRINT
570 FOR I = 1 TO N
580 PRINT "X(";I;") = ";X(I)
590 NEXT I
600 END
610 :
620 DATA 6
630 DATA 6,-3,2,1,-1,1,11
640 DATA -3,-7,0,4,-2,1,-5
650 DATA 4,-3,6,-1,2,1,28
660 DATA 2,4,5,-7,-3,2,-6
670 DATA -1,5,-4,0,8,-2,25
680 DATA 3,0,4,-2,5,-6,-4

```

## GRAUSS-JORDAN-VERFAHREN

GLEICHUNGSSYSTEM:

$$\begin{array}{cccccccc} 6 & -3 & 2 & 1 & -1 & 1 & 11 \\ -3 & -7 & \emptyset & 4 & -2 & 1 & -5 \\ 4 & -3 & 6 & -1 & 2 & 1 & 28 \\ 2 & 4 & 5 & -7 & -3 & 2 & -6 \\ -1 & 5 & -4 & \emptyset & 8 & -2 & 25 \\ 3 & \emptyset & 4 & -2 & 5 & -6 & -4 \end{array}$$

LOESUNG:

$$X(1) = 1$$

$$X(2) = 2$$

$$X(3) = 3$$

$$X(4) = 4$$

$$X(5) = 5$$

$$X(6) = 6$$

1950-1951  
 1952-1953  
 1954-1955  
 1956-1957  
 1958-1959  
 1960-1961  
 1962-1963  
 1964-1965  
 1966-1967  
 1968-1969  
 1970-1971  
 1972-1973  
 1974-1975  
 1976-1977  
 1978-1979  
 1980-1981  
 1982-1983  
 1984-1985  
 1986-1987  
 1988-1989  
 1990-1991  
 1992-1993  
 1994-1995  
 1996-1997  
 1998-1999  
 2000-2001  
 2002-2003  
 2004-2005  
 2006-2007  
 2008-2009  
 2010-2011  
 2012-2013  
 2014-2015  
 2016-2017  
 2018-2019  
 2020-2021  
 2022-2023  
 2024-2025

## 36. MATRIZEN-INVERSION NACH FADDEJEW

Eine einfache Methode zur Invertierung einer quadratischen Matrix, die zugleich noch das charakteristische Polynom liefert, ist das Verfahren von Faddejew [9].

Ist die zu invertierende Matrix  $A_1$  von der Ordnung  $n$ , so wird iterativ die Matrix  $A_n$  in  $n-1$  Schritten über die Gleichung

$$A_{i+1} = A_1 (A_i - c_i E)$$

berechnet; dabei ist  $E$  die Einheitsmatrix und  $c_i = \text{Spur}(A_i)/i$ . Die Spur einer Matrix ist die Summe der Diagonalelemente.

Die gesuchte inverse Matrix ergibt sich dann aus

$$A_1^{-1} = (A_{n-1} - c_{n-1} E) \frac{1}{c_n}$$

Der Wert  $c_n$  liefert außerdem noch den Wert der Determinante

$$\text{Det}(A) = (-1)^{n+1} c_n$$

Programme zu anderen Inversionsverfahren finden sich z.B. in [17].

### Zum folgenden Programm

Das Programm berechnet die inverse Matrix nach dem angegebenen Verfahren. Die zu invertierende Matrix wird in Form von DATA-Werten eingelesen.

Als Beispiel soll die Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Das Programm liefert hier die exakte Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Durch Matrizen-Multiplikation (Programm 23) kann geprüft werden, daß gilt

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

```

10 REM   MATRIZENINVERSION NACH FADDEJEV
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT "
50 PRINT " MATRIZENINVERSION NACH FADDEJEV "
60 PRINT "
70 NORMAL : PRINT
80 READ N: REM  ORDNUNG DER MATRIX
90 DIM A(N,N),A1(N,N),B(N,N),G(N,N),H(N,N)
100 PRINT "MATRIX:"
110 FOR I = 1 TO N
120 HT = 1
130 FOR J = 1 TO N
140 READ A(I,J):A1(I,J) = A(I,J)
150 HTAB HT
160 IF A(I,J) > = 0 THEN PRINT " ";
170 PRINT A(I,J);
180 HT = HT + 6
190 NEXT J
200 PRINT
210 NEXT I
220 :
230 FOR I = 1 TO N
240 S = 0
250 FOR J = 1 TO N
260 S = S + A(J,J)
270 NEXT J
280 C = S / I
290 :
300 FOR J = 1 TO N
310 FOR K = 1 TO N
320 IF J < > K THEN H(J,K) = A(J,K): GOTO 340
330 H(J,J) = A(J,J) - C
340 NEXT K
350 NEXT J
360 :
370 IF I < > N - 1 THEN 440
380 FOR J = 1 TO N
390 FOR K = 1 TO N
400 G(J,K) = H(J,K)
410 NEXT K
420 NEXT J

```

```

430 :
440 FOR J = 1 TO N
450 FOR K = 1 TO N
460 S = 0
470 FOR L = 1 TO N
480 S = S + A1(J,L) * H(L,K)
490 NEXT L
500 B(J,K) = S
510 NEXT K
520 NEXT J
530 :
540 FOR J = 1 TO N
550 FOR K = 1 TO N
560 A(J,K) = B(J,K)
570 NEXT K
580 NEXT J
590 NEXT I
600 :
610 IF C = 0 THEN PRINT : PRINT "MATRIX SINGULAER": END

620 PRINT
630 PRINT "INVERSE MATRIX:"
640 FOR I = 1 TO N
650 HT = 1
660 FOR J = 1 TO N
670 G(I,J) = G(I,J) / C
680 HTAB HT
690 IF G(I,J) >= 0 THEN PRINT " ";
700 PRINT G(I,J); " ";
710 HT = HT + 6
720 NEXT J: PRINT
730 NEXT I
740 D = (- 1) ^ (N + 1) * C
750 PRINT
760 PRINT "DETERMINANTE = "; D
770 END
780 :
790 DATA 4
800 DATA 5,7,6,5
810 DATA 7,10,8,7
820 DATA 6,8,10,9
830 DATA 5,7,9,10

```

# MATRIZENINVERSION NACH FADDEJEV

MATRIX:

5	7	6	5
7	10	8	7
6	8	10	9
5	7	9	10

INVERSE MATRIX:

68	-41	-17	10
-41	25	10	-6
-17	10	5	-3
10	-6	-3	2

DETERMINANTE = 1

## 37. CHARAKTERISTISCHES POLYNOM NACH FADDEJEV

Das charakteristische Polynom hat genau die Eigenwerte der Matrix als Nullstellen.

Eigenwerte  $\lambda$  und Eigenvektoren  $x$  sind Lösung der Gleichung

$$Ax = \lambda x$$

Eigenwerte von Matrizen geben an

- Klassifikation von Flächen n-ter Ordnung
  - Schwingungsfrequenzen eines Systems
  - Kreiseigenschaften von festen Körpern
  - Stationäres Verhalten von Markow-Ketten
- usw.

Wie beim vorhergehenden Programm entstehen beim Faddejew-Verfahren [9]

$$A_{i+1} = A_1 (A_i - c_i E) \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

die Koeffizienten  $c_i$  aus

$$c_i = \text{Spur}(A_i) / i$$

Versieht man die Werte  $c_i$  mit alternierenden Vorzeichen, so erhält man die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Matrix. Bestimmt man die Nullstellen des Polynoms mit Hilfe der Programme 17, 18, 31, 32 oder 33, so erhält man die gesuchten Eigenwerte der Matrix.

Programme zu anderen Eigenwertverfahren, die auch gleichzeitig die Eigenvektoren bestimmen, finden sich in [17].

### Zum folgenden Programm

Analog zum vorhergehenden Programm werden die Koeffizienten  $c_i$  bestimmt und mit den richtigen Vorzeichen versehen. Die Matrix wird wieder in Form von DATA-Werten eingelesen.

Als Beispiel wird die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

behandelt. Das Programm liefert das charakteristische Polynom

$$p(x) = x^4 - 24x^3 + 150x^2 - 200x - 375$$

dessen Nullstellen bereits in Programm 18 bestimmt worden sind. Die Eigenwerte von  $A$  sind somit

$$\lambda_1 = -1 ; \lambda_2 = 5 ; \lambda_3 = -5 ; \lambda_4 = 15.$$

```

10 REM CHARAKT.POLYNOM NACH FADDEJEW
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " CHARAKT.POLYNOM NACH FADDEJEW "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT
80 READ N: REM ORDNUNG DER MATRIX
90 DIM A(N,N),A1(N,N),B(N,N),G(N,N),H(N,N),C(N)
100 PRINT "MATRIX:"
110 FOR I = 1 TO N
120 HT = 1
130 FOR J = 1 TO N
140 READ A(I,J):A1(I,J) = A(I,J)
150 HTAB HT
160 IF A(I,J) > = 0 THEN PRINT " ";
170 PRINT A(I,J);
180 HT = HT + 6
190 NEXT J
200 PRINT
210 NEXT I
220 PRINT
230 :
240 FOR I = 1 TO N
250 S = 0
260 FOR J = 1 TO N
270 S = S + A(J,J)
280 NEXT J
290 C(I) = S / I
300 :
310 FOR J = 1 TO N
320 FOR K = 1 TO N
330 IF J < > K THEN H(J,K) = A(J,K): GOTO 350
340 H(J,J) = A(J,J) - C(I)
350 NEXT K
360 NEXT J
370 :
380 IF I < > N - 1 THEN 450
390 FOR J = 1 TO N
400 FOR K = 1 TO N
410 G(J,K) = H(J,K)
420 NEXT K

```

```

430 NEXT J
440 :
450 FOR J = 1 TO N
460 FOR K = 1 TO N
470 S = 0
480 FOR L = 1 TO N
490 S = S + A1(J,L) * H(L,K)
500 NEXT L
510 B(J,K) = S
520 NEXT K
530 NEXT J
540 :
550 FOR J = 1 TO N
560 FOR K = 1 TO N
570 A(J,K) = B(J,K)
580 NEXT K
590 NEXT J
600 NEXT I
610 :
620 PRINT
630 PRINT "KOEFFIZIENTEN DES CHARAKT.POLYNOMS:"
640 S = 1
650 IF N / 2 = INT (N / 2) THEN S = - 1
660 PRINT - S
670 FOR I = 1 TO N
680 C(I) = S * C(I)
690 PRINT C(I)
700 NEXT I
710 END
720 :
730 DATA 4
740 DATA 6,4,4,1
750 DATA 4,6,1,4
760 DATA 4,1,6,4
770 DATA 1,4,4,6

```

# CHARAKT.POLYNOM NACH FADDEJEV

MATRIX:

6	4	4	1
4	6	1	4
4	1	6	4
1	4	4	6

KOEFFIZIENTEN DES CHARAKT.POLYNOMS:

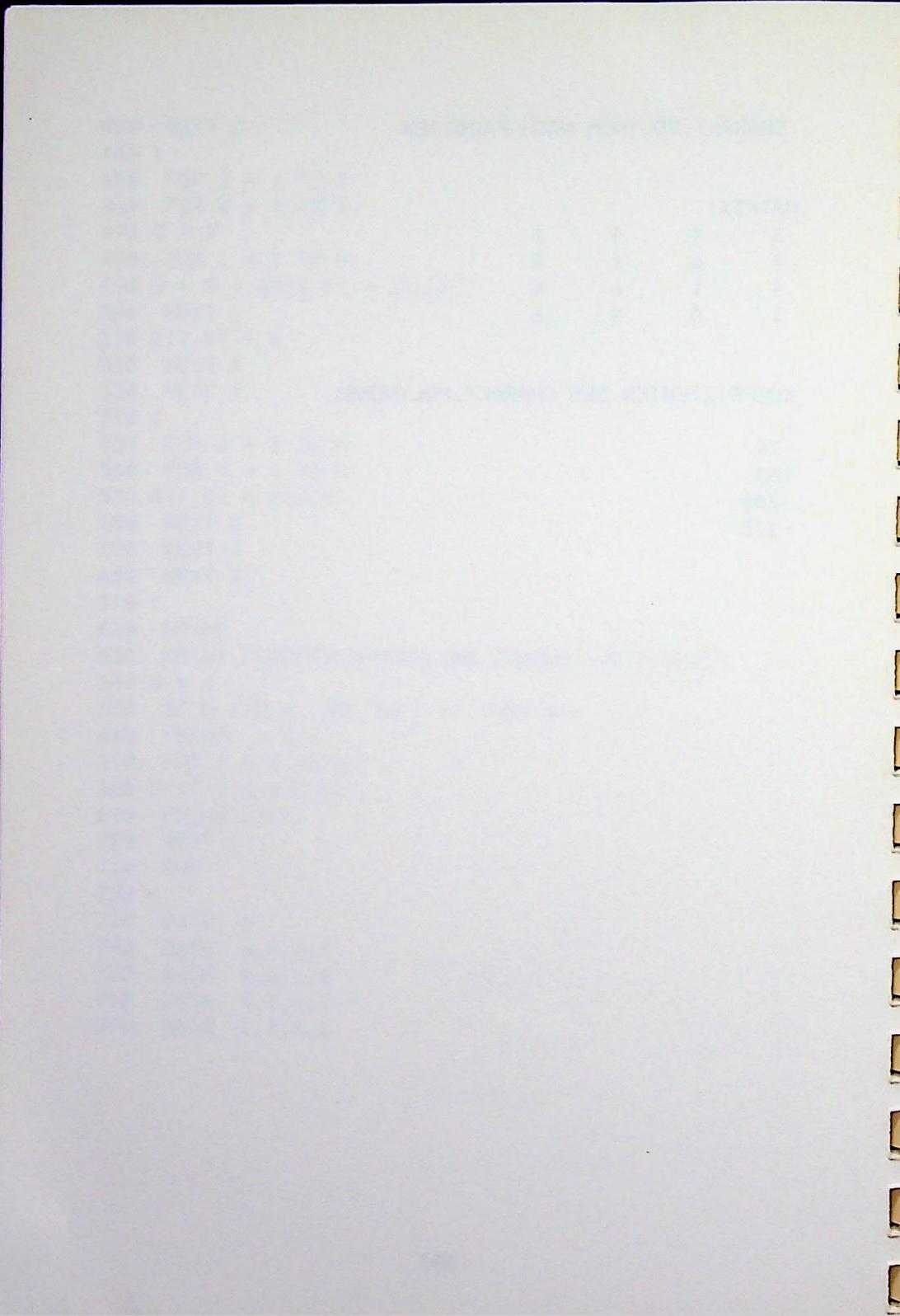
1

-24

150

-200

-375



## 38. NUMERISCHE DIFFERENTIATION

Obwohl Funktionen – im Gegensatz zur Integration – analytisch differenziert werden können, ist dennoch das folgende Programm von Interesse, da es einen Überblick über Funktions- und Ableitungswerte im ganzen Intervall ermöglicht.

Das Programm benützt die 3-Punkte-Formeln zur Ableitung:

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$$

$$f''(x) = \frac{f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2}$$

Da die Formeln nach links "übergreifen", ist zu beachten, daß die Funktion auch links vom betrachteten Intervall definiert sein muß.

Da in BASIC die Verkettung von Funktionen implementiert ist, können die beiden Formeln direkt als Funktionen mittels

```
DEF FN. .
```

vereinbart werden.

Dazu muß nur in Zeile 150 die zu differenzierende Funktion als

```
DEF FNF(x) = . . .
```

definiert werden.

Das Intervall und die Schrittweite  $h$  werden über eine INPUT-Anweisung eingegeben. Wegen der unvermeidlichen Rundungsfehler werden alle Funktionswerte im Programm auf 4 Dezimale gerundet. Dies kann, wenn gewünscht, leicht geändert werden. Die Schrittweite zur Ausgabe ist im Programm mit 0.1 vorgegeben (Zeile 280), kann aber ebenfalls variiert werden.

### Zum folgenden Programm

Als Programmbeispiel wird die Funktion

$$f(x) = x^2 e^{-x} + \sin x$$

gewählt. Das Intervall soll  $[1,2]$ , die Schrittweite 0.1 sein. Wie man dem Programmausdruck entnimmt, wächst der Funktionswert bis  $x = 1.6$  an und nimmt rechts davon wieder ab. Die Funktion hat somit zwischen 1.6 und 1.7 ein Maximum, wie es auch am Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung erkennbar ist. Die 2. Ableitung ist im ganzen Intervall negativ, d.h. der Graph ist rechtsgekrümmt.

```

10 REM NUMERISCHE DIFFERENTIATION
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " NUMERISCHE DIFFERENTIATION "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT
80 :
90 REM DEFINIERE FUNKTION IN 150
100 DEF FN F(X) = X ^ 2 * EXP ( - X ) + SIN ( X )
110 PRINT "FUNKTION: ";
120 PRINT "F(X)=X^2*EXP(-X)+SIN(X)"
130 PRINT
140 :
150 REM ERSTE ABLEITUNG
160 DEF FN A(X) = - ( - 3 * FN F(X) + 4 * FN F(X +
H) - FN F(X + 2 * H) ) / ( 2 * H )
170 :
180 REM ZWEITE ABLEITUNG
190 DEF FN B(X) = ( FN F(X) - 2 * FN F(X + H) + FN
F(X + 2 * H) ) / H ^ 2
200 :
210 INPUT "INTERVALL ? ";A,B: PRINT
220 INPUT "SCHRITTWEITE ? ";H: PRINT
230 :
240 PRINT " X      F(X)      F'(X)      F"; CHR$ (34); "(
X)"
250 FOR X = A TO B + 1E - 6 STEP .1
260 F = INT ( FN F(X) * 1E4 + .5) / 1E4
270 A = INT ( FN A(X) * 1E4 + .5) / 1E4
280 B = INT ( FN B(X) * 1E4 + .5) / 1E4
290 IF X > = 0 THEN PRINT " ";
300 PRINT X;: HTAB 7
310 IF F > = 0 THEN PRINT " ";
320 PRINT F;: HTAB 17
330 IF A > = 0 THEN PRINT " ";
340 PRINT A;: HTAB 27
350 IF B > = 0 THEN PRINT " ";
360 PRINT B
370 NEXT X
380 END

```

# NUMERISCHE DIFFERENTIATION

FUNKTION:  $F(X) = X^2 \cdot \exp(-X) + \sin(X)$

INTERVALL ? 1,2

SCHRITTWEITE ? .1

X	F(X)	F'(X)	F''(X)
1	1.2094	-.9106	-1.2854
1.1	1.294	-.7848	-1.3399
1.2	1.3658	-.6525	-1.3735
1.3	1.4241	-.5159	-1.3885
1.4	1.4688	-.3769	-1.3867
1.5	1.4995	-.2374	-1.3699
1.6	1.5164	-.0989	-1.3396
1.7	1.5196	.0372	-1.2969
1.8	1.5094	.1696	-1.2431
1.9	1.4862	.2971	-1.1792
2	1.4506	.4187	-1.1062

UNIVERSITY OF CALIFORNIA

SCHOOL OF CHEMISTRY

LABORATORY OF POLYMER CHEMISTRY

PACIFIC DIVISION

BERKELEY, CALIFORNIA

RESEARCH REPORT NO. 100

MAY 1954

BY

R. H. COLLINS

AND

J. H. D'ALEY

WITH

CONTRIBUTIONS BY

R. H. COLLINS

AND

J. H. D'ALEY

TO

THE

POLYMER SYMPOSIUM

NO. 1

PUBLISHED BY

PERGAMON PRESS

OXFORD

1954

P. 1-10

## 39. NUMERISCHE INTEGRATION (TRAPEZREGEL)

Da viele Funktionen wie

$$\sin(x^2), e^{-x^2}, \frac{\sin x}{x}$$

nicht analytisch integriert werden können, ist man hier auf numerische Integration angewiesen. Es gibt zahlreiche Integrationsmethoden. Ein bekanntes Verfahren ist die Trapezregel (auch Sehnentrapez-Regel) genannt:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(b-h) + f(b)]$$

mit der Schrittweite  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $n$  Zahl der Intervallunterteilungen.

Die Trapezregel eignet sich auch zur Extrapolation (siehe [33], [35], [36]). Weitere Programme zur numerischen Integration finden sich in [15] und [17].

### Zum folgenden Programm

Das Programm berechnet das bestimmte Integral einer Funktion nach der angegebenen Trapezformel.

Die zu integrierende Funktion ist in Zeile 90 mittels

$$\text{DEF FNF}(X) = \dots$$

zu definieren. Die Intervallgrenzen  $a$ ,  $b$  und Anzahl  $n$  der Unterteilungen werden über INPUT eingegeben.

Als Beispiel wird das Integral

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

mit 50 Unterteilungen berechnet. Das Programm liefert

$$3.14152599$$

Vergleicht man dies mit dem exakten Wert

$$\pi = 3.14159265$$

so liefert dies den Fehler

$$7 \cdot 10^{-5}.$$

```

10 REM NUMERISCHE INTEGRATION (TRAPEZREGEL)
20 HOME : INVERSE
30 PRINT " "
40 PRINT " TRAPEZREGEL "
50 PRINT " "
60 NORMAL : PRINT
70 :
80 REM DEFINIEREN DER INTERGRANDENFUNKTION
90 DEF FN F(X) = 4 / (1 + X * X)
100 PRINT "FUNKTION: ";
110 PRINT "F(X)=4/(1+X*X)"
120 PRINT
130 :
140 INPUT "INTERVALLGRENZEN ? "; A, B
150 PRINT
160 IF A > B THEN H = A: A = B: B = H
170 INPUT "ZAHL DER INTERVALLE ? "; N
180 PRINT
190 :
200 I = FN F(A) + FN F(B)
210 H = (B - A) / N: REM SCHRITTWEITE
220 :
230 S = 0
240 FOR K = 1 TO N - 1
250 S = S + FN F(A + K * H)
260 NEXT K
270 I = I + 2 * S
280 I = I * H / 2
290 :
300 PRINT "INTERGRAL = "; I
310 END

```

TRAPEZREGEL

FUNKTION: F(X)=4/(1+X\*X)

INTERVALLGRENZEN ? 0,1

ZAHL DER INTERVALLE ? 50

INTERGRAL = 3.14152599

## 40. HAMMING-VERFAHREN

Bekannte Verfahren zur Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen sind die Verfahren von Runge-Kutta und Adams-Bashforth (siehe [33], [35], [37]). Programme dazu finden sich z.B. in [17].

Ein neueres Verfahren stammt von R.W. Hamming (1959) [12].

Die Differentialgleichung

$$y' = f(x,y)$$

mit dem Anfangswert

$$y(a) = y_0 \text{ mit } x_0 \in [a,b]$$

habe die Lösungsfunktion  $u(x)$ . Im folgenden wird

$$u(x_i) = u_i, f(x_i, u_i) = f_i$$

gesetzt. Das Hamming-Verfahren läuft wie folgt in 5 Schritten ab:

- (1) Zunächst wird mit dem Prädiktor der Funktionswert

$$v_{i+1} = u_{i-3} + \frac{4}{3} h (2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2})$$

vorhergesagt.

- (2) Dieser Prädiktorwert wird mittels des vorhergehenden Korrektorwerts  $z_i$  modifiziert

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \frac{112}{121} (z_i - v_i)$$

- (3) Für diesen modifizierten Wert wird die rechte Seite der Differentialgleichung bestimmt

$$w'_{i+1} = f(x_{i+1}, w_{i+1})$$

- (4) Der neue Korrektor lautet

$$z_{i+1} = \frac{1}{8} (9u_i - u_{i-2} + 3h (w'_{i+1} + 2f_i - f_{i-1}))$$

- (5) Der gesuchte Funktionswert  $u_{i+1}$  wird schließlich mit Hilfe des Korrektors verbessert

$$u_{i+1} = z_{i+1} + \frac{9}{121} (z_{i+1} - v_{i+1})$$

Ist der rechte Rand des Integrationsintervalls  $[a, b]$  noch nicht erreicht, so wird  $x$  um die Schrittweite  $h$  erhöht und das Hamming-Verfahren erneut angewandt.

Wie man der Prädiktorformel entnimmt, benötigt man bei jedem Schritt die Kenntnis der Funktionswerte  $f_i$ ,  $f_{i-1}$  und  $f_{i-2}$ . Man sagt, das Verfahren ist dreifach zurückgreifend. Da aber nur der Startwert  $u_0$  und somit auch  $f_0$  bekannt ist, müssen die fehlenden Funktionswerte  $f_1, f_2$  mit Hilfe eines anderen Verfahrens berechnet werden. Man wählt hier meist die Methode von Runge-Kutta.

### Zum folgenden Programm

Als Beispiel soll die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y - 2x/y$$

mit dem Anfangswert  $y(0) = 1$  im Intervall  $[0, 1]$  integriert werden.

Die Differentialgleichung wird in Zeile 710 in der Form

$$710 \quad F = Y - 2 * X/Y$$

vereinbart. Das Intervall  $[a, b]$ , der Anfangswert  $y_0$  und die Schrittweite  $h$  werden in Form von DATA-Werten eingelesen. Die numerische Lösung kann dem Programm-Ausdruck entnommen werden.

Zum Vergleich ist hier zusätzlich die exakte Lösung der Differentialgleichung

$$y = \sqrt{2x + 1}$$

ausgedrückt worden. Der relative Fehler am rechten Intervallrand ist somit

$$3.6 \cdot 10^{-6}.$$

```

10 REM HAMMING-VERFAHREN
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT " "
50 PRINT " HAMMING-VERFAHREN "
60 PRINT " "
70 NORMAL : PRINT
80 :
90 REM EINGABE
100 PRINT "Y'=Y-2*X/Y": PRINT
110 READ A,B: REM INTERVALLGRENZEN
120 READ Y: REM ANFANGSWERT DER FUNKTION
130 READ H: REM SCHRITTWEITE
140 :
150 X = A:Y(1) = Y
160 PRINT " X";: HTAB 9
170 PRINT "Y"
180 :
190 REM STARTPROZEDUR NACH RUNGE-KUTTA
200 FOR I = 1 TO 3
210 T = Y
220 GOSUB 710
230 K(1) = F
240 H1 = H / 2
250 X = X + H1
260 FOR J = 1 TO 3
270 X = X + INT (J / 3) * H1
280 Y = T + H1 * K(J) * INT (J / 3 + 1)
290 GOSUB 710
300 K(J + 1) = F
310 NEXT J
320 REM SCHRITTFUNKTION
330 Y = T + H / 6 * (K(1) + 2 * K(2) + 2 * K(3) + K(4)
)
340 Y(I + 1) = Y
350 NEXT I
360 FOR I = 1 TO 3
370 X = A + I * H
380 Y = Y(I + 1)
390 GOSUB 710
400 F(I + 1) = F
410 GOSUB 780

```

```

420 NEXT I
430 :
440 REM HAMMING-VERFAHREN
450 X = A + 4 * H:K = 0:P1 = 0
460 REM PRAEDIKTOR
470 P = Y(1) + 4 / 3 * H * (2 * F(4) - F(3) + 2 * F(2)
)
480 REM MODIFIKATOR
490 M = P - 112 / 121 * (K - P1)
500 Y = M
510 GOSUB 710
520 M = F
530 REM
540 K = (9 * Y(4) - Y(2) + 3 * H * (M + 2 * F(4) - F(3)
))) / 8
550 REM SCHRITTFUNKTION
560 Y(5) = K + 9 / 121 * (K - P)
570 GOSUB 780
580 Y = Y(5)
590 GOSUB 710
600 F(5) = F:P1 = P
610 FOR I = 1 TO 4
620 Y(I) = Y(I + 1)
630 F(I) = F(I + 1)
640 NEXT I
650 X = X + H
660 IF X < B + H THEN 470
670 :
680 END
690 :
700 REM UNTERPROGRAMM ZUR AUSWERTUNG DER DIFF.GLEICH
UNG
710 F = Y - 2 * X / Y
720 RETURN
730 :
740 DATA 0,1
750 DATA 1
760 DATA .1
770 :
780 REM UNTERPROGRAMM ZUR AUSGABE
790 IF X > = 0 THEN PRINT " ";
800 PRINT X;
810 HTAB 8
820 IF Y > = 0 THEN PRINT " ";

```

830 PRINT Y  
840 RETURN

### HAMMING-VERFAHREN

$$Y' = Y - 2 * X / Y$$

X	Y
.1	1.09544553
.2	1.18321675
.3	1.26491223
.4	1.34156395
.5	1.41410298
.6	1.4831788
.7	1.5491585
.8	1.61243786
.9	1.67331976
1	1.73205707



## HISTORISCHE RECHENAUFGABEN

## Altbabylonische Keilschrifttafeln (ca. 2000 v. Chr.)

1) Länge und Breite habe ich multipliziert und so die Fläche gemacht. Wiederum was die Länge über die Breite hinausgeht zur Fläche, habe ich addiert und (es ergibt) 183. Wiederum Länge und Breite addiert (gibt) 27. Länge, Breite und Fläche (ist) was?. *Lösung: (15, 12, 180) (14, 13, 182)*

2)  $\frac{1}{4}$  Breite und Länge sind 7 Handbreiten, Länge und Breite zusammen sind 10 Handbreiten. *Lösung (6,4)*

3) Die Fläche und die Seite des Quadrates habe ich addiert und 0,75 ist es. *Lösung:  $\frac{1}{2}$*

4) Ein Balken, 0,5 lang (steht senkrecht) an einer Wand. Oben ist er um 0,1 herabgekommen. Von unten (wie weit hat er sich entfernt)? *Lösung:  $\frac{3}{10}$*

5) Finde, wie lange es dauert, bis eine Geldsumme sich bei  $\frac{1}{5}$  Jahreszins verdoppelt. *Lösung: 3.801784*

## Papyrus Rhind (ca. 1700 v. Chr.)

6) Haufen: sein Ganzes,  $\frac{2}{3}$  hinzu, (von der Summe)  $\frac{1}{3}$  hinweg, bleibt 30. *Lösung: 27*

7) 7 Häuser, in jedem 7 Katzen, jede frißt 7 Mäuse, jede von diesen 7 Ähren, von jeder Ähre könnte man 7 Scheffel Korn ernten, wieviele Dinge sind es insgesamt)? *Lösung: 19607*

8) Zu verteilen 100 Brote unter 5 Personen in arithmetischer Folge, daß  $\frac{1}{7}$  der Summe der drei ersten Anteile gleich der Summe der letzten drei Anteile ist. *Lösung: (38  $\frac{1}{3}$ , 29  $\frac{1}{6}$ , 20, 10  $\frac{5}{6}$ , 1  $\frac{2}{3}$ )*

9) Ein Quadrat und ein weiteres, dessen Seitenlänge  $\frac{3}{4}$  des ersten ist, bilden die Fläche 100. Wie lang ist die Seite des ersten? *Lösung: 8*

10) Haufen,  $\frac{2}{3}$  davon,  $\frac{1}{2}$  davon,  $\frac{1}{7}$  davon, zusammen genommen ergeben 33. *Lösung: 14  $\frac{28}{97}$*

## Anthologia Graeca (ca. 500 n. Chr.)

11) Wieviele Äpfel werden gebraucht, wenn 4 von 6 Personen  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{4}$  und  $\frac{1}{5}$  jeweils vom Ganzen erhalten, während die 5. Person 10 Äpfel erhält und genau ein Apfel für die 6. Person übrig bleibt. *Lösung: 120*

12) Demarchos verlebte  $\frac{1}{4}$  seines Lebens als Junge,  $\frac{1}{5}$  als Heranwachsender,  $\frac{1}{3}$  als Mann und verbrachte 13 Jahre im Alter. Wie alt ist er geworden?  
*Lösung: 60*

13) Ziegelmacher, ich muß dringend an meinem Haus weiterbauen. Es ist schön heute und ich brauche nicht mehr als die üblichen 300 Ziegel. Du allein kannst so viele am Tage machen, dein Sohn 200 und dein Schwiegerson 250. Wenn ihr alle drei miteinander arbeitet, in welcher Zeit könnt ihr die guten Ziegel herstellen? *Lösung: 2/5*

14) Ich bin ein Löwe aus Erz; aus meinen Augen, aus meinem Mund und aus meiner rechten Fußsohle springen Fontänen hervor. Mein rechtes Auge füllt das Becken in 2 Tagen, das linke in 3 und mein Fuß in 4 Tagen. Wie lange dauerts, wenn alles vereint? *Lösung: 3 33/37*

#### **Algebra des al-Hwarizmi (ca. 825 n. Chr.)**

15) Ein Quadrat und zehn seiner Wurzeln sind gleich 39. *Lösung 3, -13*

16) Ein Quadrat und 21 sind gleich zehn seiner Wurzeln. *Lösung 3,7*

17) Ich habe 10 in zwei Teile geteilt. Dann habe ich den einen Teil durch den anderen geteilt und der Quotient war 4. *Lösung (8,2)*

18) Ich habe 10 in zwei Teile geteilt. Dann habe ich jeden Teil mit sich selbst multipliziert, das kleinere vom größeren abgezogen und der Rest war 40.  
*Lösung (7,3)*

#### **“Aufgaben zur Schärfung des Verstandes” von Alkuin (ca. 790)**

19) Wenn 100 Buschel Korn so auf 100 Leute verteilt werden, daß jeder Mann 3 Buschel, jede Frau 2 Buschel und jedes Kind  $\frac{1}{2}$  Buschel erhält, ist die Frage, wieviel Männer, Frauen und Kinder waren es?  
*Lösung: (17, 5, 78) (14, 10, 76) (11, 15, 14) (8, 20, 72) (5, 25, 70)*

20) 30 Körbe, 10 davon voll, 10 halbvoll und 10 leer, sollen so unter drei Söhne verteilt werden, daß die Körbe und Inhalte gleich verteilt sind. Wie kann dies geschehen? *Lösung: z.B. 10 halbvolle*

21) Ein Hund jagt ein Kaninchen, das 150 Fuß Vorsprung hat. Der Hund springt immer 9 Fuß weit, wenn das Kaninchen 7 Fuß springt. Nach wieviel Sprüngen hat der Hund das Kaninchen eingeholt? *Lösung: 75*

22) Ein Wolf, eine Ziege und ein Kohlkopf müssen in einer Fähre einen Fluß überqueren, die außer dem Fährmann noch einen weiteren Gegenstand befördern kann. Wie muß der Fährmann sie über den Fluß bringen, damit weder der Wolf die Ziege noch die Ziege den Kohl frißt?

### Lilavati des Bhaskara II (1150)

23) Das Quadrat aus  $\frac{1}{8}$  einer Herde Affen tummelt sich im Walde, während die übrigen zwölf auf dem Gipfel eines Hügels brüllen. *Lösung: 16, 48*

24) Jemand hat 300 Rupien und 6 Pferde. Ein anderer hat 10 Pferde vom gleichen Wert, aber eine Schuld von 100 Rupien. Beide haben dasselbe Vermögen. Was ist der Preis eines Pferdes? *Lösung: 57  $\frac{1}{7}$*

25) Schönes Mädchen mit den glitzernden Augen, sage mir, so du die richtige Kunst der Umkehrung verstehst: Welches ist die Zahl, die mit 3 vervielfacht, sodann um  $\frac{3}{4}$  des Produkts vermehrt, durch 7 geteilt, um ein Drittel des Quotienten vermindert, durch Ausziehung der Quadratwurzel, Addition von 8 und Division durch 10 die Zahl 2 hervorbringt? *Lösung: 28*

26) Von einem Schwarm Bienen läßt sich  $\frac{1}{5}$  auf einer Kadambablüte,  $\frac{1}{3}$  auf der Silindhablume nieder. Der dreifache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten einer Kutuja, eine Biene blieb übrig, die in der Luft hin und her schwebt, gleichzeitig angezogen von dem lieblichen Duft einer Jasmine und eines Pandamus. Sage mir, reizendes Weib, die Anzahl der Bienen!  
*Lösung: 15*

### Liber abaci des Leonardo von Pisa (1202),

27) Jemand reist in Geschäften nach Lucca, von da nach Florenz und von da heim nach Pisa. In jeder Stadt verdient er so viel, daß sich sein Geld jeweils verdoppelt; in jeder Stadt gibt er aber auch 12 Denare aus. Nach der Heimkehr hat er nichts mehr. *Lösung: 10  $\frac{1}{2}$*

28) Erhält ein Mann vom zweiten 7 Denare, so hat er fünfmal so viel wie der zweite; erhält der zweite Mann vom ersten fünf Denare, so hat er siebenmal so viel wie der erste. Wieviel hatte jeder ursprünglich?  
*Lösung: (12  $\frac{7}{17}$ , 46  $\frac{2}{17}$ )*

29) Ein König sandte 30 Mann in seinen Obstgarten um Bäume zu pflanzen. Wenn sie 1000 Bäume in 9 Tagen pflanzen können, wie lange würden 36 Mann für 4400 Bäume benötigen? *Lösung: 33*

30) Ein Mann hinterläßt seinem ältesten Sohn 1 Bezant und  $\frac{1}{7}$  des Verbleibenden. Von dem Rest gab er dem zweitältesten 2 Bezant und wieder  $\frac{1}{7}$  des verbleibenden Rests. Diese Teilung setzte er fort, er gab dem nächstjüngeren 1 Bezant mehr als dem vorhergehenden und je  $\frac{1}{7}$  des verbleibenden Rests. Wieviele Söhne waren es, wenn der letzte Sohn den Rest erhält, aber alle Söhne gleichviel? *Lösung: 6*

### Algorismus Ratisbonensis (1450)

31) Item ain fraw hat veigen vnd hat auch kinder vnd sy gibt iglichen kind 12 veigen, so pleibt ir 37 feigen. Nu nympt sy dij veigen widerumb von den kindern vund gibt ander wais hyn vnd gibt iglichen kind 15 feigen, so zw rint (fehlen) ir 44 veigen. Nu frag ich, wije vil sind der feigen vnd der kinder gewesen? *Lösung: (361, 27)*

32) Item: diuidatur 8 in tales 2 partes, ut veniant in diuisione 3. (Teile 8 so in zwei Summanden, daß ihr Quotient 4 ist). *Lösung: (6 2/5, 1 3/5)*

33) Si tunc vixisses quantum vixisti et iterum tantum et dimidium et dimidium dimidij tanti, 100 annos compleuisses. (Wenn du noch solange leben würdest, wie du schon gelebt hast und nocheinmal so viel, und noch halb mal soviel und ein viertelmal soviel, so würdest du 100 Jahre alt werden).

*Lösung: 26 2/3*

34) Item ein thurnn (Turm) ist  $1/4$  im ertrich (Erdreich) vnd 10 schuch im wasser vnd  $3/5$  ym luft. Nu frag ich, wye lang der thurnn seij vnd uil schuch im wasser sey vnd vieuil im luft. *Lösung: 66 2/3*

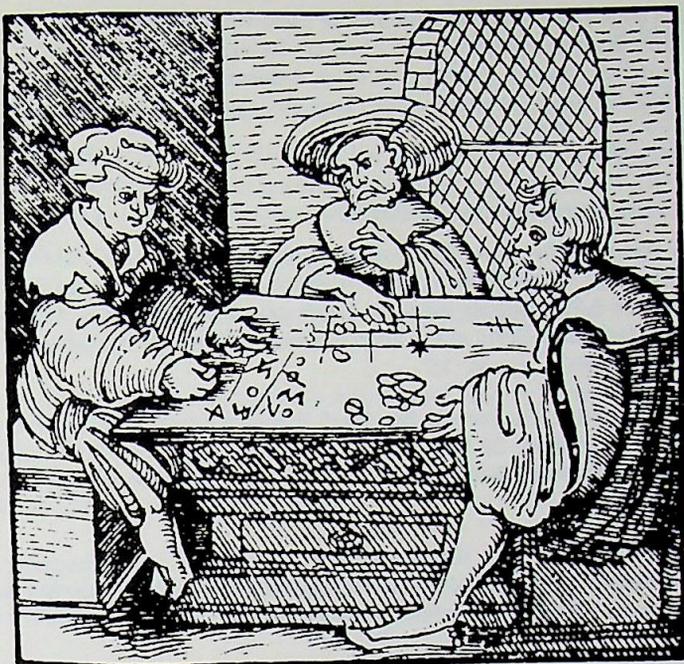
### Bamberger Rechenbuch (1483)

35) Item ist ein Faß, das hat drei Zapfen. Wenn man den ersten zieht, geht es aus in 2 Tagen. Mit dem anderen Zapfen geht es aus in 3 Tagen. Mit dem dritten Zapfen geht es aus in 4 Tagen. Und wenn man sie alle drei zieht, wielange muß es ausrinnen? *Lösung: 12/13*

36) Es lauf ein Has gegen ein Holz und ein Hund lauf ihm hinten nach. Und wenn der Has 12 Sprünge tut, so tut der Hund 15, und der Has ist vor dem Hund 100 Schritt. Nun ist die Frag, wann der Hund den Hasen erläuft, in wieviel Schritten? *Lösung: 33 1/3*

37) Es sind zwei Gesellen, diegehen nach Rom. Einer geht alle Tage 6 Meilen. Der ander geht am ersten Tag 1 Meile, an dem anderen Tag 2, etc. Um alle Tag eine Meile mehr denn vorher. Nun willst du wissen, in wieviel Tagen einer soviel gegangen ist als der andere? *Lösung: 11*

38) Item ein Turm gebaut nach solchen Sitten:  $1/4$  des Turmes ist im Erdreich,  $1/5$  im Wasser und 100 Schuh in der Luft. Nun frag ich, wieviel Schuh sind im Wasser und Erdreich und wieviel Schuh sind an dem ganzen Turm? *Lösung: 181 9/11*



“Titelblatt von Adam Rieses Rechenbuch (2. Aufl. 1529). Es zeigt einen Wettbewerb zwischen einem Zahlen- und einem Linienrechner”

### Rechenbuch des Adam Riese (1526)

- 39) Item ein kauffmann zeucht (verleiht) hinweg mit gelt / gewinnt ein drittheil seines Hauptguts (Kapital)/vnd 4 fl. mehr/legt an hauptgut vnd gewinn/gewinnt den vierdten theil / bringt zusammen 40. *Lösung: 21*
- 40) Item einer spricht zum andern/wann ich noch so vil/ein drittheil/vnd ein vierdtheil so viel hett / so wer meines gelts über 100 fl. so viel als jetzt darunder. *Lösung: 55 35/43*
- 41) Item ein fuhrmann feht von Leiptzig ghen Nürenberg in 6 tagen /vnd ein ander fuhrman feht desselbigen tags aus von Nürenberg /kompt in 8 tagen ghen Leiptzig / in wie vile tagen komen sie zusammen? *Lösung: 3 3/7*
- 42) Item 21 Personen / Männer und Frawen / haben vertronken 81 d / ein Mann sol geben 5 d vnd eine Fraw 3 d. Nu frag ich wie viel jeglicher in sonderheit gewesen sind? *Lösung: (9, 12)*

43) Item einer hat zween silberne Becher / vnd ein oberlied (Deckel) / so daselbig auff edn ersten gesetzt wirdt / helt er viermal des andern gewicht. Wirdt es aber auff den andern gesetzt / so ist er dreymal schwerer dann der erste / vnd das oberlied wigt 16 loth / wieviel wigt ein jeglicher Becher in sonderheit?  
*Lösung: (7 3/11, 5 9/11)*

#### Algebra von Christopher Clavius (1608)

44) Um seinen Sohn zum Rechnen zu ermuntern, zahlt ein Vater seinem Sohn 8 Pfennige für die Lösung einer Aufgabe, wenn sie richtig gelöst wurde und zieht ihm 5 Pfennige ab, wenn sie falsch war. Nach 26 Aufgaben schuldet weder der Vater dem Sohn etwas noch umgekehrt. Wieviele Aufgaben hat der Sohn richtig gelöst? *Lösung: 10*

45) Wenn ich jedem Bettler vor der Tür 7 Pfennige geben würde, würden mir 24 Pfennige verbleiben. 32 Pfennige würden fehlen um jedem 9 Pfennige geben zu können. Wieviele Bettler sind es und wieviel Geld habe ich?  
*Lösung: (28, 220)*

46) Einem Diener werden 100 Denare und ein Mantel als Jahresgehalt versprochen. Nach 7 Monaten verläßt der Diener das Haus und erhält 20 Denare und den Mantel. Wieviel ist der Mantel wert? *Lösung: 92*

#### Vollständige Anleitung zur Algebra von Euler (1770)

47) Ein Vater hinterläßt seinen 3 Söhnen ein Vermögen von 1600 Reichsthalern. Nach seinem Testament soll der älteste Sohn 200 Rtl. mehr haben als der zweite, der zweite aber 100 Rtl. mehr als der dritte; wieviel bekommt jeder? *Lösung: (700, 500, 400)*

48) Suche ein Zahl von der Beschaffenheit, daß, wenn man sie mit 5 multipliziert, das Produkt so viel unter 40 liegt, wie die Zahl selbst unter 12.  
*Lösung: 7*

49) Zwey Bäuerinnen haben zusammen 100 Eyer, die erste spricht: wann ich die meinigen zu je 8 überzähle, so bleiben 7 übrig; die andere spricht: wann ich die meinigen zu je 10 überzähle, so bleiben mir auch 7 übrig; wieviel hat jede Eyer gehabt? *Lösung: (63, 37) (23, 77)*

50) Eine Gesellschaft von Männern und Weibern sind in einem Wirtshaus; ein Mann verzehrt 25 Cop., ein Weib aber 16 Cop. und es findet sich, daß die Weiber insgesamt einen Cop. mehr verzehrt haben als die Männer; wieviel Männer und Weiber sind es gewesen? *Lösung: (7 + 16 t, 11 + 25 t) t ganzzahlig*

## ZITATE

Wenn jemand die Mathematiker fragt: Ihr Wunderlichen – von was für Zahlen spricht Ihr eigentlich – Was werden sie wohl antworten? daß sie von Zahlen reden, die man nur denken kann, unmöglich aber auf irgendeine andere Art handhaben.

*Plato*

Geometrie ist die Erkenntnis von Gegenständen ewigen Seines.

*Plato*

Wer die Geometrie begreift, vermag alles auf der Welt zu verstehen.

*Galilei*

Ceux qui ne sont pas mathematiciens sont portes a considerer les mathematiques comme une science inhumaine.

*E. Borel*

Gott existiert, wie die Mathematik widerspruchsfrei ist, der Teufel, weil wir es nicht beweisen können.

*A. Weil*

Die Zahl ist das Wesen aller Dinge.

*Pythagoras*

Ich hörte mich anklagen, als sei ich ein Feind der Mathematik überhaupt, die doch niemand höher schätzen kann als ich, da sie gerade das leistet, was mir zu bewirken völlig versagt blieb.

*Goethe*

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man mit ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es etwas ganz anderes.

*Goethe*

Ein Mathematiker, der nicht irgendwie ein Dichter ist, wird nie ein vollkommener Mathematiker sein.

*Weierstraß*

Die Wissenschaft der reinen Mathematik in ihrer modernen Entwicklung darf von sich behaupten, die ureigenste Schöpfung des menschlichen Geistes zu sein.

*Whitehead*

Es gibt jedoch noch einen anderen Grund für die hohe Wertschätzung der Mathematik: sie allein bietet den exakten Naturwissenschaften ein gewisses Maß an Sicherheit, das ohne Mathematik nicht denkbar wäre.

*Einstein*

Zur Mathematik führt kein Königsweg.

*Menachmos*

Es gibt nichts Unpopulärereres als die moderne Mathematik, und auch darin steckt ein Stück Symbolik der unendlichen Ferne, der Distanz. Alle großen Werke des Abendlandes von Dante bis Parsifal sind unpopulär.

*Spengler*

Nicht etwa, daß bei größerer Verbreitung des Einblicks in die Methode der Mathematik notwendigerweise viel mehr Kluges gesagt werden würde als heute, aber es würde sicher viel weniger Unkluges gesagt.

*K. Menger*

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht – alles andere ist Menschenwerk.

*Kronecker*

Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer zu fassen.

*Dedekind*

Der Begriff der Mathematik ist der Begriff der Wissenschaft überhaupt. Alle Wissenschaften sollen daher Mathematik werden.

*Novalis*

Wer ein mathematisches Buch nicht mit Andacht ergreift und es wie Gottes Wort liest, versteht es nicht.

*Novalis*

Die Mathematik ist wie die Gottseligkeit, zu allen Dingen nütze, aber wie diese nicht jedermanns Sache.

*J. Kraus*

Ich glaube . . ., daß es, im strengsten Verstand, für den Menschen nur eine einzige Wissenschaft gibt, und diese ist die reine Mathematik.

*Lichtenberg*

Die sogenannten Mathematiker von Profession haben sich, auf die Unmündigkeit der übrigen Menschen gestützt, einen Kredit von Tiefsinn erworben, der viel Ähnlichkeit mit dem vom Heiligen hat, den die Theologen für sich haben.

*Lichtenberg*

Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.

*d'Alembert*

So kann also die Mathematik definiert werden als diejenige Wissenschaft, in der wir niemals das kennen, worüber wir sprechen, und niemals wissen, ob das, was wir sagen, wahr ist.

*B. Russell*

Stets sind sie eilig, nur zu messen und zu rechnen, halten es für die Hauptsache, und le calcul! le calcul! ist ihr Feldgeschrei. Aber ich sage: ou le calcul commence, l'intelligence des phenomenes cesse: während Einer bloße Zahlen und Zeichen im Kopf hat, kann er nicht dem Kausalzusammenhang auf die Spur kommen.

*Schopenhauer*

Das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit.

*G. Cantor*

Die Geometrie ist einzig und ewig, ein Widerschein aus dem Geiste Gottes, daß die Menschen an ihr teilhaben, ist eine Ursache dafür, daß der Mensch Ebenbild Gottes ist.

*Kepler*

Die Mathematik ist eine gar herrliche Wissenschaft, aber die Mathematiker taugen oft den Henker nicht.

*Lichtenberg*

Wer die Sicherheit der Mathematik verachtet, stürzt sich in das Chaos der Gedanken.

*da Vinci*

Befaßt Euch zuerst mit Mathematik, denn die Mathematik ist die Zahl, und die Zahl ist Gott.

*J.H. Fabre*

Die Natur ist mathematisch, die Meisterwerke der Kunst sind im Einklang mit der Natur; sie drücken die Naturgesetze aus und bedienen sich ihrer. Folglich ist das Kunstwerk mathematisch, und der Wissenschaftler kann das strengste Urteil anlegen und unfehlbare Formeln anwenden.

*Le Corbusier*

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or introductory paragraph.

Second block of faint, illegible text, appearing to be a continuation of the document's content.

Third block of faint, illegible text, possibly containing a list or numbered items.

Fourth block of faint, illegible text, continuing the narrative or list.

Fifth block of faint, illegible text, possibly a concluding paragraph or a separate section.

Sixth block of faint, illegible text, continuing the document's content.

Seventh block of faint, illegible text, possibly a final paragraph or a signature block.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Becker O.: Die Grundlagen der Mathematik, Freiburg, München 1964
- [2] Becker O.: Zur Geschichte der griechischen Mathematik, Darmstadt 1965
- [3] Bell E.T.: Die großen Mathematiker, Düsseldorf, Wien 1967
- [4] Bronstein I.N./Semendjajew K.A.: Taschenbuch der Mathematik Zürich, Frankfurt/M. 1967
- [5] Courant R./Robbins H.: Was ist Mathematik? Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962
- [6] Davies P./Hersh R.: The Mathematical Experience Boston, Basel, Stuttgart 1981
- [7] Dreszer J.: Mathematik-Handbuch, Zürich, Frankfurt/M., Thun 1975
- [8] Engel A.: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt Stuttgart 1977
- [9] Faddejew D.K./Faddejewa W.N.: Numerische Methoden der linearen Algebra, München, Wien 1973
- [10] Ferschl F.: Markovketten, Berlin, Heidelberg, New York 1970
- [11] Goldstine H.: The Computer from Pascal to von Neumann Princeton 1980
- [12] Hamming R.W.: Numerical Methods for Scientists and Engineers Tokyo, Düsseldorf, Johannesburg, London 1973
- [13] Halder H./Heise W.: Einführung in die Kombinatorik München 1976
- [14] Hardy G.H./Wright E.M.: Einführung in die Zahlentheorie München 1958
- [15] Herrmann D.: Mathematik-Programme in BASIC, Köln 1982
- [16] Herrmann D.: Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik – 30 BASIC-Programme, Wiesbaden 1983
- [17] Herrmann D.: Numerische Mathematik – 40 BASIC-Programme Wiesbaden im Druck
- [18] Hoppe E.: Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum Wiesbaden 1966

- [19] Jeger M.: Einführung in die Kombinatorik 1, Stuttgart 1973
- [20] Karlson P.: Zauber der Zahlen, Frankfurt/M. 1965
- [21] Kleine Enzyklopädie Mathematik, Thun, Frankfurt/M. 1977
- [22] Menninger K.: Zahlwort und Ziffer, Göttingen 1979
- [23] Meschkowski H.: Problemgeschichte der Mathematik I, II  
Mannheim, Wien, Zürich 1979, 1981
- [24] Meschkowski H.: Meyers Handbuch über die Mathematik  
Mannheim, Wien, Zürich 1972
- [25] Neugebauer O.: Vorgriechische Mathematik  
Berlin, Heidelberg, New York 1969
- [26] Otte M.: Mathematiker über Mathematik  
Berlin, Heidelberg, New York 1974
- [27] Popp W.: Wege des exakten Denkens, München 1981
- [28] Scharlau W./Opolka H.: Von Fermat bis Minkowski  
Berlin, Heidelberg, New York 1980
- [29] Schneider E.: Mathematik ernst und heiter, Wiesbaden 1968
- [30] Schubart H. Einführung in die klassische und moderne Zahlentheorie  
Braunschweig 1974
- [31] Smith D.E.: History of Mathematics II, New York 1958
- [32] Steen L.A.: Mathematics Today, New York 1978
- [33] Stoer J./Bulirsch R.: Einführung in die Numerische Mathematik I, II  
Berlin, Heidelberg, New York 1972, 1973
- [34] Struik D.J.: Abriß der Geschichte der Mathematik, Berlin 1976
- [35] Stummel F./Hainer K.: Praktische Mathematik, Stuttgart 1971
- [36] Toernig W.: Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker, I, II  
Berlin, Heidelberg, New York 1979
- [37] Tropicke J.: Geschichte der Elementarmathematik I  
Berlin, New York 1980
- [38] Wussing H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik, Berlin 1979
- [39] Wussing H./Arnold W.: Biographien bedeutender Mathematiker  
Köln 1978
- [40] van der Waerden B.L.: Erwachende Wissenschaft I  
Basel, Stuttgart 1966

## **BILDQUELENNACHWEIS**

Aulis Verlag	Seite 120
Bibliographisches Institut AG	Seite 90
Deutsches Museum, Bildstelle B IV	Seiten 16, 17
Niedersächsische Landesbibliothek	Seite 178
Vandenhoeck & Ruprecht	Seiten 12, 15

Im übrigen danken wir den Verlagen für die freundliche Unterstützung.

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes the need for transparency and accountability in financial reporting.

2. The second part of the document outlines the various methods and techniques used to collect and analyze data. It includes a detailed description of the experimental procedures and the statistical tools employed.

3. The third part of the document presents the results of the study, showing the trends and patterns observed in the data. It includes several tables and graphs to illustrate the findings.

4. The fourth part of the document discusses the implications of the results and the potential applications of the findings. It highlights the significance of the study and the need for further research in this area.

5. The fifth part of the document provides a conclusion and a summary of the key points discussed throughout the document. It also includes a list of references and a bibliography.

6. The sixth part of the document contains a list of appendices and supplementary materials, including raw data, detailed calculations, and additional figures.

7. The seventh part of the document provides a glossary of terms and a list of abbreviations used throughout the document.

8. The eighth part of the document contains a list of footnotes and a list of references.

9. The ninth part of the document contains a list of references and a list of references.

10. The tenth part of the document contains a list of references and a list of references.

H.Dürkopf H.Stern

# CHEMIE MIT DEM APPLE II+IIe

Anregungen und  
Programmbeispiele aus  
verschiedenen Bereichen



Programme auf Diskette erhältlich

iwt

Programme reichen von stöchiometrischen Berechnungen bis zur Elementedatei. Besonders genutzt werden die grafischen Möglichkeiten. Die Anwendungsbeispiele gehen von Strukturformeln, grafischen Darstellungen von Versuchsanordnungen und Funktionen bis zur 3-D Grafik im Detail.

In Vorb. Aug. 1984. Ca. 220 Seiten. Spiralh. Ca. DM 48,-/ca. Fr. 48,-/ca. S 432,- ISBN 3-88322-037-X

G.Daubach D.Herrmann

# MATHEMATIK AUF DEM APPLE II+IIe

Fertige Programme,  
Anregungen und  
Erläuterungen in BASIC



Programme auf Diskette erhältlich

iwt

Dieses Buch enthält 40 mathematische Programme aus den Bereichen: Mehrregister-Arithmetik - Zahlentheorie - Kombinatorik - Algebra - Geometrie - numerische Mathematik. Neu ist die Langzahl-Arithmetik. Sie gestattet die Grundrechenarten für Zahlen bis 255 Stellen.

In Vorb. Juni 1984. 250 Seiten. Spiralh. Ca. DM 42,-/ca. Fr. 42,-/ca. S 378,- ISBN 3-88322-036-1

H.Stern D.Herrmann

# WIRTSCHAFT AUF DEM APPLE II+IIe

BASIC-Programme  
für den Anwender



Programme auf Diskette erhältlich

iwt

Diese Sammlung enthält 40 BASIC-Programme für den Apple II/IIe aus den Bereichen Finanzmathematik, Unternehmensforschung und Betriebswirtschaft. Wirtschaftliche Fragestellungen treffen jeden von uns, entweder als Steuerzahler, Sparerr oder Kreditnehmer. Zahlreiche Beispiele erläutern die vollständigen Programme.

1983. 200 Seiten. Kart. DM 38,-/Fr. 38,-/S 342,- ISBN 3-88322-035-3

Logo

# Harold Abelson Einführung in LOGO

Übersetzt und bearbeitet von Herbert Lohse

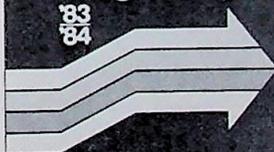
iwt

LOGO besitzt wichtige Eigenschaften moderner Programmiersprachen. Wesentlich bei LOGO ist die »igel-Grafik«. Mit einfachen Befehlen und Programmen können komplexe Zeichnungen erstellt werden. LOGO ist eine interpretierende Sprache, so können alle Funktionen und Programme ohne Wartezeit ausgeführt werden.

1983. 186 Seiten. Spiralh. DM 42,-/Fr. 42,-/S 378,-. ISBN 3-88322-023-X

# Der Apple Software Wegweiser

'83  
'84



Eine Auswahl deutschsprachiger  
Programme und wer sie liefert

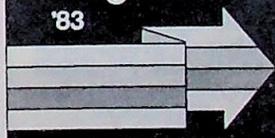
iwt

Der Apple Software-Wegweiser wendet sich in erster Linie an die Besitzer von Apple-Computern, die nach geeigneten Programmen für ihre Anwendung suchen. Aber auch Händler, die ihre Kunden gezielt beraten wollen, werden auf ihn nicht verzichten.

1983. 304 Seiten. Kart. DM 42,-/Fr. 42,-/S 378,-. ISBN 3-88322-028-0

# Der Apple Hardware+ Peripherie Wegweiser

'83



Eine umfassende Sammlung deutscher  
und internationaler Produkte und  
wer sie liefert

iwt

Dies ist die umfassendste Sammlung deutscher und internationaler Hardwarezusätze und Peripherie-Erweiterungen für Apple-Computer. Sie wendet sich an Anwender von Apple-Computern, die nach Erweiterungen ihrer Systeme suchen. Unersetzlich ist sie auch für alle Händler, die ihre Kunden gezielt beraten wollen.

Herausgeber Armin P. Landsberg. 1983. 272 S. Kart. DM 42,-/Fr. 42,-/S 378,- ISBN 3-88322-025-6

W.Kitza

# dBase II Eine Einführung

Von der Idee  
zur Konzeption

iwv

Dieses Buch beschreibt an Beispielen aus der Praxis das Arbeiten mit dem wohl meistbenutzten Datenbanksystem der Welt. Es werden keine Vorkenntnisse vorausgesetzt, sondern es wird Schritt für Schritt das komplette Wissen vermittelt, das man zum Arbeiten mit einer Datenbank braucht.

1984. 226 Seiten.  
Geb. DM 56,-/Fr. 56,-/S 498,-  
ISBN 3-88322-038-8

W.Kitza

# dBase II Programmierung

Von der Konzeption  
zum Programm

Programme auf Diskette erhältlich

iwv

Das Buch, auch als Einstieg in das Programmieren geeignet, zeigt dBase II als mächtige Programmiersprache für die Datenbankanwendung. Inhalt: Was ist eine Datenbank? Warum dBase II? Wie wird programmiert? Einführung: Autokostenverwaltung, für Fortgeschrittene: Literaturverwaltung, kommentierte Listings, Tips und Tricks.

In Vorb. Juli 1984. Ca. 240 Seiten. Geb.  
Ca. DM 56,-/ca. Fr. 56,-/ca. S 498,-  
ISBN 3-88322-039-6

Günther Daubach

# MICROSOFT BASIC 86 MICROSOFT BASIC 86 MICROSOFT BASIC 86 MICROSOFT BASIC 86 MICROSOFT BASIC 86 MICROSOFT BASIC 86

für 16Bit-PersonalComputer  
mit CP/M 86 oder MSDOS

iwv

Teil 1 gibt eine Einführung in die Grundlagen: Sprachinterpretier und Compiler werden erläutert. Teil 2 enthält eine umfassende Beschreibung aller Anweisungen, Befehle und Funktionen, abgerundet mit zahlreichen Beispielen. Teil 3 enthält eine Zusammenstellung aller Befehle mit ihrer Syntax, weitere Beispiele und Tabellen.

In Vorb. April 1984. Ca. 300 Seiten. Spiralh.  
Ca. DM 58,-/ca. Fr. 58,-/ca. S 522,-  
ISBN 3-88322-073-6

# K.W.Hillerkus Basic aus der Praxis

Typische Programm-Beispiele  
für alle Berufe

iwv

Dieses Buch enthält 30 Programme aus den Arbeitsbereichen: Suchen - Schreiben - Rechnen - Sortieren. Sie sind an keinen Rechner gebunden, da sie unter CP/M und MBasic geschrieben sind. Sie entstanden aus der praktischen Arbeit und haben sich bereits bewährt. Auch der Newcomer kann sie ohne Schwierigkeiten einsetzen.

1983. 168 Seiten. Spiralh. DM 40,-/Fr. 40,-/  
S 360,-. ISBN 3-88322-031-0

# K.W.Hillerkus Basic aus der Praxis

Programm-Beispiele für  
kaufmännisch orientierte Berufe

iwv

Dieses Buch umfaßt 34 Programme und Routinen aus den Arbeitsbereichen: Suchen - Schreiben - Rechnen - Sortieren - Statistik. Die Programme sind unter CP/M in MBasic geschrieben und können somit leicht auf andere Rechner umgesetzt werden.

1983. 192 Seiten. Spiralh. DM 40,-/Fr. 40,-/  
S 360,-  
ISBN 3-88322-042-6

E. A. Widmer

# Computertechnik für Manager

Organisations-Manual

Interplanar AG

iwv

Mit dem von der Beratungsfirma Interplanar entwickelten Buch kann der Manager den EDV-Ablauf des Betriebes schnell beherrschen. Das Manual ist durch die Arbeitsblätter in allen Bereichen einsetzbar.

1981. 222 S. Zahlr. Abb. u. Organisations-schemata. Geb. DM 128,-/Fr. 98,-/  
S 1152,-. ISBN 3-88322-019-1. Ringo.  
DM 158,-/Fr. 128,-/S 1422,-.  
ISBN 3-88322-020-5. Zusätzl. Arbeitsblätter u. Organisationsformulare. DM 48,-/  
Fr. 35,-/S 432,-. Best.-Nr. IWT 205-X



# L. Dodt Multiplan im Einsatz

mit Anwendungen für die Praxis.  
Programme auf Diskette erhältlich.

**iwt**

Dieses Buch führt Sie zur sicheren Handhabung der Tabellenkalkulation. Zahlreiche Anwendungen mit ausführlicher Beschreibung schließen sich an. Unter anderem: Werbeplanung, Reisekosten, Kapazitätsauslastung, Baufinanzierung, Reaktionszeiten. – Auch für die englische Version nutzbar.

In Vorb. Juni 1984. Ca. 250 Seiten. Spiralh.  
Ca. DM 56.–/ca. Fr. 56.–/ca. S 498.–  
ISBN 3-88322-074-4

# L. Dodt SuperCalc im Einsatz

mit Programmen und Masken  
für den Anwender.  
Auch auf Diskette lieferbar.

**iwt**

Dieses Buch wendet sich an SuperCalc-Anwender: Anfänger führt es schnell zur sicheren Handhabung, Fortgeschrittene finden ausgereifte Anwendungen. Beispiele mit ausführlicher Beschreibung machen das Buch auch für VisiCalc-Anwender interessant. Die Unterschiede zwischen VisiCalc und SuperCalc sind in einem Kapitel dargestellt.

1984. 248 Seiten. Spiralh. DM 56.–/  
Fr. 56.–/S 498.–  
ISBN 3-88322-040-X

# L. Dodt Lotus 1-2-3 im Einsatz

mit Anwendungen für die Praxis.  
Teil 1: Kalkulation und Grafik  
Programme auf Diskette erhältlich.

**iwt**

Die Verbindung von Kalkulation, Grafik und Datenbank verhalf Lotus zu schnellem Erfolg. In diesem Buch erlernen Sie zunächst die sichere Nutzung von Kalkulation und Grafik. Zahlreiche Beispiele zeigen die Leistungsfähigkeit von 1-2-3: Umsatzprognose, Investitionsrechnung, Tilgungsplan, Private Ausgaben u.a.

1984. Ca. 250 Seiten. Geb. Ca. DM 58.–/  
ca. Fr. 58.–/ca. S 522.–  
ISBN 3-88322-085-X

G. Daubach D. Herrmann

# Programme in MICRO SOFT BASIC

Band 1

# MATHE MATIK

Fertige Programme, Anregungen  
und Erläuterungen in BASIC  
Programme auf Diskette erhältlich

**iwt**

Dieses Buch enthält 40 mathematische Programme aus den Bereichen: Mehrregister-Arithmetik – Zahlentheorie – Kombinatorik – Algebra – Geometrie – numerische Mathematik. Neu ist die Langzahl-Arithmetik. Sie gestattet die Grundrechenarten für Zahlen bis 255 Stellen.

In Vorb. Juni 1984. 250 Seiten. Spiralh.  
Ca. DM 48.–/ca. Fr. 48.–/ca. S 432.–  
ISBN 3-88322-077-9

G. Daubach D. Herrmann

# Programme in MICRO SOFT BASIC

Band 2

# WIRT SCHAFT

BASIC Programme für den Anwender  
mit grafischer Darstellung

Programme auf Diskette erhältlich

**iwt**

Eine Hilfestellung für wirtschaftliche Entscheidungen sind Programmsammlungen, die die guten Grafik- und Formmöglichkeiten des Computers nutzen. Diagramme, Sprites, optische Darstellungen von Simulationen werden eingesetzt, die die Ergebnisse verdeutlichen. Die finanzmathematischen Grundlagen sind zu jedem Programm beschrieben.

In Vorb. Juni 1984. Ca. 200 Seiten. Spiralh.  
Ca. DM 48.–/ca. Fr. 48.–/ca. S 432.–  
ISBN 3-88322-076-0

G. Daubach H. Durkopf H. Sterner

# Programme in MICRO SOFT BASIC

Band 3

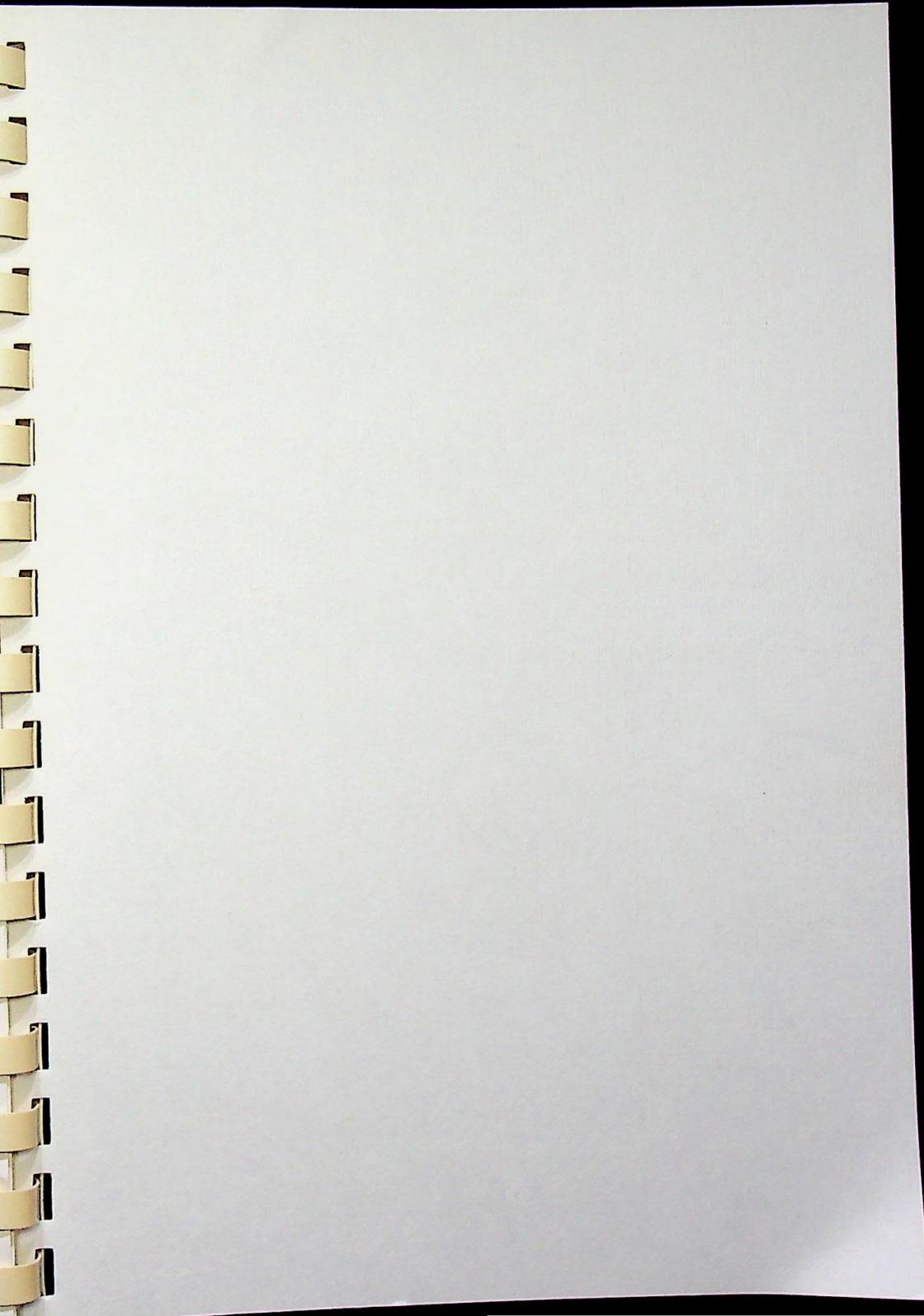
# CHEMIE

Anregungen und Programmbeispiele aus verschiedenen Bereichen  
Programme auf Diskette erhältlich

**iwt**

Programme reichen von stöchiometrischen Berechnungen bis zur Elementedatei. Besonders genutzt werden die grafischen Möglichkeiten. Die Anwendungsbeispiele gehen von Strukturformeln, grafischen Darstellungen von Versuchsanordnungen und Funktionen bis zu 3-D Grafik im Detail.

In Vorb. Aug. 1984. Ca. 220 Seiten. Spiralh.  
Ca. DM 56.–/ca. Fr. 56.–/ca. S 498.–  
ISBN 3-88322-078-7



G. Daubach, D. Herrmann

# Mathematik auf dem Apple II, IIe, IIc

Dieses Buch enthält 40 mathematische Programme aus den Bereichen:  
— Mehr-Register-Arithmetik — Zahlentheorie — Kombinatorik — Algebra — Geometrie — Numerische Mathematik.

Die hier neu vorgelegte Langzahl-Arithmetik gestattet die Grundrechenarten für Zahlen bis 255 Stellen. Zahlreiche Anwendungen finden auch die angegebenen kombinatorischen Prozeduren.

Sie finden auch das Rechnen mit Polynomen, Matrizen und komplexen Zahlen: Neben dem komplexen Horner-Schema werden insbesondere Algorithmen zur Polynomdivision und Matrizeninversion gegeben.

Anwendungsbezogen sind die Programme der Numerischen Mathematik. Hier werden Verfahren zur Lösung von linearen und nichtlinearen Gleichungen gegeben, zum Eigenwertproblem von Matrizen und zur numerischen Integration und Differentiation.  
Programme auf Diskette erhältlich.

ISBN 3-88322-036-1